现代数学丛书

邵学安 著

紧致齐性空间上的调和分析

HARMONIC ANALYSIS ON COMPACT HOMOGENEOUS SPACES

ZHENG XUEAN

上海科学技术出版社

·现代数学丛书·

紧致齐性空间上的调和分析

郑学安　著

上海科学技术出版社

Modern Mathematics Series

HARMONIC ANALYSIS ON COMPACT HOMOGENEOUS SPACES

Zheng Xuean

Shanghai Scientific & Technical Publishers

内 容 提 要

本书是作者在紧致齐性空间上的调和分析方面研究工作的小结. 内容分为四部分:一、必要的预备知识;二、紧致李群上的调和分析的若干基本结果;三、紧致齐性空间上的调和分析的若干基本结果;四、上述理论在多复变函数论中的某些应用.

本书可供数学研究工作者及高等学校数学专业的研究生、教师与高年级学生学习参考.

图书在版编目(CIP)数据

紧致齐性空间上的调和分析/郑学安著. -上海:上海科学技术出版社,2000.7
(现代数学丛书)
ISBN 7-5323-5316-8

Ⅰ.紧... Ⅱ.郑.... Ⅲ.抽象调和分析
Ⅳ.0177.5

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 29020 号

责任编辑 赵序明

上海科学技术出版社出版发行
(上海瑞金二路 450 号 邮政编码 200020)
上海新华印刷厂印刷 新华书店上海发行所经销
2000 年 7 月第 1 版 2000 年 7 月第 1 次印刷
开本 787×1092 1/16 印张 23.5 插页 4 字数 307 000
印数 1-1 200 定价: 42.40 元

Harmonic Analysis on Compact Homogeneous Spaces

Zheng Xuean

Ahstract

This is the monograph to collect the author research works on Harmonic analysis on compact homogeneous spaces. It contains following topics: preliminaries of Lie groups and Lie algebras; asymptotic properties of Fourier coefficients, Poisson summation formulae, Riesz potentials and Riesz transformations; H^p spaces on compact Homogeneous spaces; applications to several complex variables.

出版说明

从60年代起，由华罗庚教授任主编的《现代数学丛书》编辑委员会曾组织编著，并由我社出版了多部具有很高水平的数学学术专著，有几部专著并已在国外出了外文版，受到国内外数学界和广大读者的高度重视，获得了很高的评价．原编委会中华罗庚、关肇直、吴新谋三位教授虽已先后逝世，但他们为本《丛书》所作出的贡献迄今仍为人们所敬仰、怀念．由于某些客观原因，《现代数学丛书》的出版工作曾一度停顿．

为了适应现代数学的迅速发展，更好地反映我国数学家近几年的优秀研究成果，必须大力加强《现代数学丛书》的规划、编辑、出版工作，充实编委会的力量．考虑到不少编委年事已高，经向原编委会中大部分同志及数学界有关专家广泛征求意见后，于1990年对编委会作了调整，补充了一些著名的中年数学家和学科带头人，建立了新的编委会，并进一步明确了本丛书的宗旨．

《现代数学丛书》新的编辑委员会由苏步青教授任名誉主编、谷超豪教授任主编，18位著名数学家任委员．编委会负责推荐（或审定）选题和作者，主持书稿的审核等工作．

《现代数学丛书》的宗旨是：向国内外介绍我国比较成熟的、对学科发展方向有引导作用的、国内第一流水平的数学研究成果，反映我国数学研究的特色和优势，扩大我国数学研究成果的影响，促进学科的发展和国内外的学术交流．

为了实现上述宗旨，本丛书将陆续组织出版在基础数学、应用数学和计算数学方面处于学科发展前沿、有创见且具有系统完整

研究成果的现代数学学术专著.

为出版好《现代数学丛书》,我们热切地期望着数学界各位专家的大力支持和悉心指导,并欢迎广大读者提出宝贵的建议和意见.

上海科学技术出版社

序

Fields 奖获得者、数学大师丘成桐教授于 1997 年，在题为《中国数学发展之我见》一文中，说了这样一段话："中国近代数学能超越西方或与之并驾齐驱的主要有三个，当然我不是说其他工作不存在，主要是讲能够在数学历史上很出名的有三个：一个是陈省身教授在示性类(characteristic class)方面的工作；一个是华罗庚在多复变函数方面的工作，一个是冯康在有限元计算方面的工作. 我为什么单讲华先生在多复变函数方面的工作，这是我个人的偏见. 华先生在数论方面的贡献是大的，可是华先生在数论方面的工作不能左右全世界在数论方面的发展，他在这方面的工作基本上是从外面引进来的观点和方法. 可是他在多复变函数方面的贡献比西方至少早了 10 年，海外的数学家都很尊重华先生在这方面的成就. 所以，我们一定要找自己的方向，我想这是一个很重要的看法. 我们近 20 年来基本上跟随外国的潮流. 我们没有把基本的想法搞清楚，所以始终达不到当年陈先生、华先生或冯先生他们的工作."(引自 1997 年中国科学院，科学发展报告). "海外的数学家都很尊重华先生在这方面的成就"，这是我在国外亲眼目睹，亲身感受的. 华先生在多复变函数方面的贡献的确是举世公认的. 他的名著《多复变数函数论中的典型域的调和分析》也早已成为多复变数函数论的经典著作. 大家这样尊重华先生在多复变数函数论的成就，归根结蒂因为这是我们中国人开创的、具有鲜明特色的"自己的方向"，是"从数学的根本上找的研究方向". 正因为这是具有高度创新的工作，以至于至今生命不息，还在不断地向前发展.

在华先生写完了上述那部名著之后，他就指出：作为这项工作的进一步发展之一，应建立起典型群上的调和分析．他自己写了这方面的第一篇论文（见本书参考文献[2]）．20世纪50年代，我在他的指导下，进行这方面的研究．后来一批当时的年轻人继续做了很多很好的工作．20世纪70年代末，当我写《典型群上的调和分析》一书来总结这方面的研究工作时，很少为他人写序言的华先生，欣然命笔，为拙著写了一篇十分精彩的序言．他指出了这项研究工作的意义，而序言的最后一句话是："这是一个有丰富前途的方向，乐之为序．"岁月匆匆，华先生写这篇序言已是20年前的事了，而他老人家也已离开我们14年了．但值得告慰他老人家的是：他对数学，尤其是多复变函数的创造性的贡献，愈来愈为人们所认识，所肯定．他开创的具有鲜明中国特色的"自己的方向"正在不断地发扬光大．

这部由郑学安教授撰写的专著，就是由华先生栽下的大树上结的又一个硕果．从典型群上的调和分析，继续沿着华先生的路线，以李群、李代数的表示为工具，来研究紧致李群与紧致齐性空间上的调和分析是顺理成章的事．当然其难度较之典型群上的调和分析要难得很多很多．郑学安教授以他深厚的数学功底、勤奋的工作，出色地、创造性地完成了这项研究工作．这是一部具有鲜明的中国特色的专著，是继续沿着中国人"自己的方向"向前奋进的书．正因为如此，本书所叙述的那些研究成果，较之国外在这项课题上的研究成果要系统得多，深刻得多．并且仍有很多很有意义的问题有待于进一步的发展与研究．这也再次证明：华先生在20年前所说的："这是一个有丰富前途的方向"是多么有远见！

2000年是华先生的90寿辰，也是他逝世15周年．本书的出版，无疑是对他老人家的一个十分有意义的纪念．他虽已离开我们，但他开创的"自己的方向"依然指引着我们，他依然活在我们的心中．

龚　昇
已卯春节

前 言

紧致齐性空间上的调和分析，是抽象调和分析的重要内容，也是经典的 Fourier 级数理论的自然而深刻的发展. 紧致齐性空间上的调和分析还与多复变函数论的某些领域有着密切而深刻的联系.

当一个连通的紧致黎曼流形上的等度量变换群在其上的作用可递时，就称它为紧致齐性空间，因此紧致齐性空间包含了广泛的几何对象：紧致李群、欧氏空间中的球面、多复变有界对称域的 Silov 边界等，都是紧致齐性空间的特例.

本书是作者沿着华罗庚教授和龚昇教授的研究路线，在紧致齐性空间上的调和分析中所作工作的一个小结. 本书分成四部分：第 1 章是预备知识，内容包括李群李代数、复半单李代数、紧致李群的表示等理论的简要叙述，介绍了紧致齐性空间上的 Fourier 级数、广义函数的卷积和 Laplace 算子；介绍了紧致齐性空间上的 Dirichlet－龚核、Ahel－龚核与 Riesz－龚核. 其中由龚昇教授在酉群上的调和分析研究中建立的 Abel－龚核和 Riesz－龚核，在紧致齐性空间调和分析的研究中有着深刻而广泛的应用.

第 2 章主要讨论紧致李群上的调和分析，主要内容有：Fourier 系数的渐近性质、Fourier 级数的求和、Poisson 求和公式、Riesz 位势与 Bessel 位势、Riesz 变换与 Bessel 变换、Riesz－龚平均在逼近论中的应用等.

除了龚昇教授在酉群上的调和分析中所指出的重要差别外，紧致齐性空间上的调和分析与经典 Fourier 级数最重要的差别之

一,也许就是第 2 章中关于 Fourier 系数渐近性质的结果.在经典的 Fourier 级数的理论中,关于 Fourier 系数的 Riemann－Lebesgue 的定理是众所周知的.但是对于非交换的紧致李群和紧致齐性空间,它的可积函数的 Fourier 系数的性质就变得极为复杂.简单地说,在非交换的情形,只有平方可积函数,即 L^2 函数,经典的 Riemann－Lebesgue 定理才成立,而对于 $1\leqslant p<2$ 的 L^p 函数,经典的定理已经不成立了.第 2 章中还给出了上面当 $1\leqslant p<2$ 时,"最坏的"L^p 函数的 Fourier 系数发散于无穷时阶的精确估计.

当用 Poisson 非切向极大来定义紧致齐性空间上的 H^p 空间时,就需要讨论上面定义之下的 H^p 空间的刻画问题.本书第 3 章主要讨论紧致齐性空间上的 H^p 空间的基本问题.紧致齐性空间上的 Poisson 核是很复杂的,直接讨论 Poisson 核和 Poisson 积分整体的分析性质也是相当困难的.在第 3 章中,通过对 Abel－龚核和 Poisson 核间相互关系的讨论,通过建立适当的 Grand 极大函数,及对 Grand 极大函数性质的讨论,得到了包括 H^p 空间原子分解在内的紧致齐性空间上 H^p 空间理论的基本结果.

本书第 4 章,是应用紧致齐性空间上的调和分析,讨论多复变函数论中的某些课题,包括对多复变有界对称域的 Bergman 核、Poisson－华核和 Cauchy 核相互关系的讨论,得到了上述的 Poisson－华核和 Cauchy 核可以用 Bergman 核准确地表示出来.研究了一类典型域上 Poisson－华积分与 Cauchy 积分的边界性质.本章内容仅是应用紧致齐性空间上的调和分析来讨论多复变函数论中若干课题的初步结果,这方面存在着许多尚未解决的课题,有待进一步的研究.

作者对安徽大学的李世雄教授和著名数学家、中国科学技术大学的龚昇教授表示衷心的感谢,正是上述两位导师,指导作者走上了数学研究之路.

作 者
1999 年 3 月
于北京师范大学

目　录

序

前　言

CONTENTS

第 1 章

引　　论

§1.1　引　　言

华罗庚教授在完成了他的名著《多复变数函数论中的典型域的调和分析》后，应用他的理论到酉群上的调和分析，深化了著名的 Peter—Weyl 定理，开创了我国典型群、紧致李群和紧致齐性空间上调和分析的研究.

在 20 世纪 50 年代后期，在华罗庚教授工作的基础上，龚昇教授对酉群上的调和分析进行了系统的研究，在这一研究中，龚昇教授建立了一系列的思想、概念和方法，奠定了我国典型群、紧致李群和紧致齐性空间上调和分析研究的基础.

由华罗庚教授开创的、龚昇教授奠基的这一研究在 20 世纪 60 年代后期至 20 世纪 70 年代前期由于国内客观原因曾一度停顿. 直到 70 年代后期，这一研究又在我国蓬勃发展起来.

基本思想是：酉群是一类典型域的 Silov 边界，而旋转群和酉辛群则分别是一类实典型域和一类四元数典型域的 Silov 边界. 将龚昇教授在酉群上调和分析中建立的思想与方法应用于旋转群和酉辛群的调和分析中，就产生了旋转群和酉辛群上调和分析的系统研究. 上述酉群、旋转群和酉辛群上调和分析的系统研究成果，已由龚昇教授总结为专著《典型群上的调和分析》，于 1983 年由科学出版社出版，而该书的英文版则由德国 Springer-Verlag 出版公司于 1993 年出版.

在典型群上的调和分析的研究比较完整之后，将龚昇教授在

酉群上调和分析中建立的思想和方法，与李群、李代数及其表示的一般理论有机地结合起来，进行一般紧致李群上的调和分析的研究，就成为十分自然的事情.

紧致李群、欧氏空间中的球面、多复变函数论中典型域的 Silov 边界等等，都是特殊的紧致齐性空间. 紧致齐性空间上的等度量变换群是紧致李群，因而紧致齐性空间又具有某种代数性质. 将龚昇教授在酉群上调和分析中建立的思想和方法，与李群、李代数及其表示理论有机地结合起来，与紧致李群上的调和分析有机地结合起来，进行紧致齐性空间上调和分析的研究，同样成为十分自然的事情.

多复变函数论中典型域的 Silov 边界是紧致齐性空间. 应用紧致李群和紧致齐性空间上调和分析的理论，来研究多复变函数论中这方面的问题，又为多复变函数论这方面的研究提供了新的工具.

从另一角度来看，紧致李群和紧致齐性空间上的调和分析，又是经典的 Fourier 分析理论的自然而深刻的发展，两者之间既有着本质的联系，又有着重要的差别.

除了龚昇教授在酉群上调和分析研究中指出的两者之间的重要差别之外，紧致李群和紧致齐性空间上的调和分析同经典的 Fourier 分析之间重要的差别之一，也许就是本书第 2 章中关于紧致李群上 Fourier 系数渐近性质的结果.

在经典的 Fourier 分析中，关于 Fourier 系数的 Riemann－Lebesgue 的定理是众所周知的，但是，对于非交换的紧致李群，其上可积函数的 Fourier 系数的渐近性质就变得极为复杂. 粗略地说，对于非交换的紧致李群，只有平方可积函数即 L^2 函数，经典的 Riemann－Lebesgue 的定理才成立，而对 $1\leqslant p<2$ 的 L^p 函数来说，经典的 Riemann－Lebesgue 的定理已经不成立了. 在本书第 2 章中，给出了 $1\leqslant p<2$ 时，非交换紧致李群上 L^p 函数的 Fourier 系数，发散于无穷时的渐近性质的精确估计.

§1.2 李群与李代数

1.2.1 李群

李群的定义 称 G 为一个 n 维的*实李群*，是指 G 既是一个群，又是一个 n 维的实解析流形，而且群的乘法运算 $G\times G\to G$，$(a,b)\to ab$ 和逆运算 $G\to G, a\to a^{-1}$ 都是实解析映照.

在上面的定义中，若群的乘法可交换，就称 G 是一个*交换李群*. 将上面定义中的实域换成复域，就得到 *n 维复李群*的定义.

若 H 是(G 作为群时的)G 的子群，又是(G 作为流形时的)G 的实解析子流形，且 H 关于子流形的拓扑是一个李群，则称 H 为 G 的*子李群*. 当 H 是 G 的离散子群时，也称 H 为 G 的*零维子李群*. 在本书中，称 G 为李群时总是指 G 的维数 $n\geqslant 1$，G 的零维子群或零维子李群都将特别冠以"零维"二字.

G 的*中心* Z 是由 G 中与一切元都交换的元组成的 G 的子群，即

$$Z=\{a\in G,\text{对一切 } x\in G \text{ 成立 } ax=xa\}.$$

显然 Z 是 G 的正规子群.

称李群 G 是一个*单李群*，是指 G 的正规子群只有 G 自身及 G 的零维正规子群两类，显然，1 维的连通李群必为单李群，且是交换李群，维数大于 1 的单李群都是非交换的李群.

李群的重要而典型的例子是矩阵李群，矩阵李群的元是同阶的非异方阵且满足一定的条件. 群的乘法就是矩阵乘法，群中元的逆元就是非异方阵的逆方阵.

下面给出几个矩阵李群的例子，更丰富的例子可在本书参考文献[6]中找到.

例 1 $\mathrm{GL}(n,C)$称为复一般线性群，它是由 $n\times n$ 的非异复方阵全体组成的矩阵李群.

例 2 $\mathrm{SL}(n,C)$称为复特殊线性群，它是由 $n\times n$ 的行列式为 1 的复方阵全体组成的矩阵李群.

例3 GL(n,R)称为实一般线性群，它是由$n\times n$的非异实方阵全体组成的矩阵李群.

例4 SL(n,C)称为实特殊线性群，它是由$n\times n$的行列式为1的实方阵全体组成的矩阵李群.

例5 U_n称为n阶酉群，它是由适合等式$X\overline{X}'=I_n$的$n\times n$复方阵X全体组成的矩阵李群，其中I_n表示n阶单位矩阵；$\overline{X}$表示矩阵X的复共轭；X'表示矩阵X的转置矩阵.

例6 SO(n)称为n阶旋转群，它是由适合等式$XX'=I_n$且行列式为1的$n\times n$实方阵X全体组成的矩阵李群.

例1至例6看作实李群，它们的实维数分别是$2n^2$、$2n^2-2$、n^2、n^2-1、n^2、$\frac{1}{2}n(n-1)$，而例1与例2又分别是n^2和n^2-1维的复李群.

1.2.2 李代数

李代数的定义 称V为域F上的n维李代数，是指V是域F上的n维线性空间，且在V上定义了一个适合下面三条性质的换位运算$[\cdot,\cdot]:V\times V\to V,(X,Y)\to[X,Y]$：

1) 对任意的X、$Y\in V$，下式恒成立：
$[X,Y]=-[Y,X]$，特别有$[X,X]=0$；

2) 对任意的X、Y、$Z\in V$和a、$b\in F$，下式恒成立：
$[aX+bY,Z]=a[X,Z]+b[Y,Z]$；

3) 对任意的X、Y、$Z\in V$，恒有下面的Jocobi等式：
$[X,[Y,Z]]+[Y,[Z,X]]+[Z,[X,Y]]=0$成立.

在上面定义中，若F为复域C或实域R时，就称V为n维复李代数或n维的实李代数.

在上面定义中，若对任意的X、$Y\in V$，恒有$[X,Y]=0$成立，则称V为交换李代数.

若H是V的线性子空间，且对于V上的换位运算，对任意的X、$Y\in H$，恒有$[X,Y]\in H$，换句话说，V上的换位运算在H中封闭，就称H为V的子李代数.

若 N 是 V 的子李代数，且对任意的 $X\in N$ 和 $Y\in V$，恒有 $[X,Y]\in N$，则称 N 为 V 的一个**理想**.

李代数 V 的**中心** z 是指下面的 V 的子李代数：

$$z=\{X\in V,\text{对任意的 } Y\in V,[X,Y]=0 \text{ 恒成立}\}.$$

显然，z 是 V 的理想，当 $z=\{0\}$ 时，称 z 为 V 的**零理想**.

李代数 V 称为一个**单李代数**，是指 V 只有 V 自身和零理想这两个平凡的理想. 显然，1 维李代数必是单代数且是交换的. 维数大于 1 的单代数均为非交换的.

李代数的重要且典型的例子是矩阵李代数，它是由适合一定条件的同阶方阵组成的域 F 上的线性空间，其中线性空间的加法就是矩阵的加法，线性空间中的数量乘法就是数与矩阵的乘法，而换位运算则由下面方阵的方括号积所定义：

$$[A,B]=AB-BA. \tag{1.1}$$

下面给出矩阵李代数的几个例子，更多的例子可在本书参考文献[6]中找到.

例 7 $\mathrm{gl}(n,C)$ 为 $n\times n$ 复方阵全体组成的矩阵李代数，它是矩阵李群 $\mathrm{GL}(n,C)$ 的李代数.

例 8 $\mathrm{sl}(n,C)$ 是迹为零的 $n\times n$ 复方阵全体组成的矩阵李代数，它是矩阵李群 $\mathrm{SL}(n,C)$ 的李代数，其中方阵 X 的迹 $\mathrm{Tr}X$ 是方阵 X 的主对角线元素的和.

例 9 $\mathrm{gl}(n,R)$ 为 $n\times n$ 实方阵全体组成的矩阵李代数，它是矩阵李群 $\mathrm{GL}(n,R)$ 的李代数.

例 10 $\mathrm{sl}(n,R)$ 是迹为零的 $n\times n$ 实方阵全体组成的矩阵李代数，它是矩阵李群 $\mathrm{SL}(n,R)$ 的李代数.

例 11 u_n 为 $n\times n$ 的反 Hermite 阵全体组成的矩阵李代数，它是酉群 U_n 的李代数，其中 X 为反 Hermite 阵是指它适合等式 $X+\bar{X}'=0$.

例 12 $\mathrm{so}(n)$ 为 $n\times n$ 的实反对称阵全体组成的矩阵李代数，它是旋转群 $\mathrm{SO}(n)$ 的李代数.

在上面例子中，例 7 和例 8 是复李代数，例 9 至例 12 是实李

代数.要验证一个矩阵线性空间是一个矩阵李代数,只需验证它们关于(1.1)式定义的矩阵方括号积运算为封闭的即可.

1.2.3 同态与同构

设 G_1 与 G_2 是两个李群,若映射 $f: G_1 \to G_2$ 是流形 G_1 到 G_2 中的连续映射,且适合对任意的 a、$b \in G$, $f(ab)=f(a)f(b)$ 恒成立,就称 f 为**李群的同态**.

若 $f: G_1 \to G_2$ 既是群 G_1 到 G_2 上的代数群的群同构,又是流形 G_1 到 G_2 上的同胚映射,就称 f 为**李群的同构**,并称李群 G_1 与 G_2 是同构的.

设 $\mathfrak{g}_1$ 和 $\mathfrak{g}_2$ 是域 F 上的两个李代数,$[\cdot,\cdot]_1$ 和 $[\cdot,\cdot]_2$ 分别是 $\mathfrak{g}_1$ 和 $\mathfrak{g}_2$ 的换位运算,若映射 $f: \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$ 适合:

1) 对任意的 λ、$\mu \in F$ 和 X、$Y \in \mathfrak{g}_1$,下式恒成立:

$f(\lambda X+\mu Y)=\lambda f(X)+\mu f(Y)$;

2) 对任意的 X、$Y \in \mathfrak{g}_1$,下式恒成立:

$f([X,Y]_1)=[f(X),f(Y)]_2$.

就称 f 为**李代数的同态**.

若 $f: \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$ 是李代数的同态,且 f 还是一一映上的映射,就称 f 为**李代数的同构**,并称李代数 $\mathfrak{g}_1$ 和 $\mathfrak{g}_2$ 是同构的.

1.2.4 左不变向量场

设 G 是一个李群,$a \in G$ 是 G 的元.通过 G 中群的运算,a 在 G 上定义了下面三个重要的微分同胚:

1. 左移 L_a: $L_a: G \to G$, $x \to L_a(x)=ax$;
2. 右移 R_a: $R_a: G \to G$, $x \to R_a(x)=xa$;
3. 内自同构 A_a: $A_a: G \to G$, $x \to A_a(x)=axa^{-1}$.

G 在 a 点的切空间记为 $T_a(G)$,特别,G 的幺元总记为 e,而 $T_e(G)$ 是 G 在幺元处的切空间.L_a、R_a 和 A_a 作为映射,它们的微分记为 $\mathrm{d}L_a$、$\mathrm{d}R_a$ 和 $\mathrm{d}A_a$,它们都是对应点处切空间之间的线性同构.例如,L_a 将 b 变为 ab,则 $(\mathrm{d}L_a)_b$ 将 $X \in T_b(G)$ 变为 $(\mathrm{d}L_a)_b(X) \in T_{ab}(G)$,而在不会产生混淆时,我们就简记 $(\mathrm{d}L_a)_b(X)$ 为 $\mathrm{d}L_a(X)$.

设 $\tilde{X}$ 是李群 G 上的一个 C^∞ 向量场,$\tilde{X}$ 在点 $a \in G$ 处的切向量

记为 $\widetilde{X}_a$，即 $\widetilde{X}_a \in T_a(G)$. 称李群 G 上的一个 C^∞ 向量场为左不变向量场，是指对任意的 $a \in G$，以下等式

$$\widetilde{X}_a = \mathrm{d}L_a(\widetilde{X}_e) \tag{1.2}$$

恒成立，其中，$\widetilde{X}_e \in T_e(G)$ 是 $\widetilde{X}$ 在幺元处的切向量.

(1.2)式又等价于：对任意的 $a \in G$，以下等式

$$\mathrm{d}L_a(\widetilde{X}) = \widetilde{X} \tag{1.3}$$

恒成立.

李群 G 上左不变向量场全体组成一个线性空间. 记这个线性空间为 $\chi(G)$，从(1.2)式可得到存在着线性同构

$$\Pi: \chi(G) \to T_e(G), \widetilde{X} \to \Pi(\widetilde{X}),$$

适合

$$\Pi(\widetilde{X}) = \widetilde{X}_e. \tag{1.4}$$

因为(1.4)式定义的映射 Π 是 $\chi(G)$ 到 $T_e(G)$ 上的线性同构，所以每个幺元处的切向量 $X \in T_e(G)$ 就唯一定义了 G 上的一个左不变向量场 $\widetilde{X}$，这时(1.2)式变成

$$\widetilde{X}_a = \mathrm{d}L_a(X), \forall\ a \in G. \tag{1.5}$$

适合(1.5)式的左不变向量场 $\widetilde{X}$ 称为 $X \in T_e(G)$ 所对应的左不变向量场.

类似地，可定义右不变向量场.

1.2.5 李群的李代数

C^∞ 流形上的两个 C^∞ 向量场 $\widetilde{X}$ 和 $\widetilde{Y}$ 的方括号积是一个 C^∞ 向量场，它由下式定义：

$$[\widetilde{X}, \widetilde{Y}] = \widetilde{X}\widetilde{Y} - \widetilde{Y}\widetilde{X}. \tag{1.6}$$

对李群来说，若 $\widetilde{X}$ 和 $\widetilde{Y}$ 是两个左不变向量场，则 $[\widetilde{X}, \widetilde{Y}]$ 也是一个左不变向量场. 这样，通过(1.4)式定义的 $\chi(G)$ 到 $T_e(G)$ 上的线性同构 Π，$\chi(G)$ 上的方括号积就诱导了 $T_e(G)$ 上的一个换位运算

$$[\cdot, \cdot]: T_e(G) \times T_e(G) \to T_e(G),$$
$$(X, Y) \to [X, Y],$$

它定义为

$$[X,Y]=\Pi[\Pi^{-1}(X),\Pi^{-1}(Y)]$$
$$=\Pi[\tilde{X},\tilde{Y}]=[\tilde{X},\tilde{Y}]_e, \tag{1.7}$$

其中 $\tilde{X}$ 和 $\tilde{Y}$ 分别是 X、$Y\in T_e(G)$ 对应的左不变向量场.

由向量场方括号积的性质,立即得到(1.7)式定义了 $T_e(G)$ 上的换位运算,且具有 1.2.2 节中李代数定义中的换位运算的三条性质,因此李群 G 在幺元处的切空间上赋予(1.7)式定义的换位运算后,就成为一个李代数,这个李代数就称为李群 G 的李代数,通常记为 $\mathfrak{g}$.

因此,称李代数 $\mathfrak{g}$ 是李群 G 的李代数是指:(a)$\mathfrak{g}$ 是 G 在幺元处的切空间;(b)$\mathfrak{g}$ 上的换位运算由(1.7)式所定义.

1.2.6 左不变 Riemann 度量和指数映射

设 G 是一个实李群,$\mathfrak{g}$ 是 G 的李代数. 在 $\mathfrak{g}$ 上取定一个内积,即正定对称的二次型$(\cdot,\cdot)$,则可定义 G 上的一个左不变 Riemann 度量 $g(\cdot,\cdot)$如下:

$$g_a(\mathrm{d}L_a(X),\mathrm{d}L_a(Y))=(X,Y) \tag{1.8}$$

对任意的 X、$Y\in T_e(G)$和 $a\in G$ 均成立.

李群 G 在(1.8)式的左不变 Riemann 度量下是一个完备的 Riemann 流形. 而且左移 L_a 是 G 上的等度量变换.

有了 Riemann 度量,就有了 Levi-Civita 联络,也就有了指数映射 exp:

$$\exp:\mathfrak{g}\rightarrow G, X\in\mathfrak{g}\rightarrow \exp X\in G. \tag{1.9}$$

关于上面的指数映射,对任意的 $0\neq X\in\mathfrak{g}$,

$$\exp tX\quad(-\infty<t<+\infty)$$

不仅是一条过幺元 e(即 $t=0$ 时)的测地线,它在幺元处的切向量是 X,而且它还是 G 的单参数子群,也就是说,对任意两个实数 a 和 b,下面的等式恒成立:

$$\exp aX\exp bX=\exp(a+b)X.$$

当 G 是矩阵李群时,它的李代数 $\mathfrak{g}$ 就是一个矩阵李代数. 设 $x(t)$是 G 的过幺元 e 即单位方阵的单参数曲线,即 $t=0$ 时 $x(0)=e$,则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t)\Big|_{t=0}\in\mathfrak{g},$$

且每个 $X\in\mathfrak{g}$ 均可通过 G 的一条过幺元的单参数曲线 $x(t)$ 按上面方法求导而得到.这时(1.9)式定义的指数映射,就具体地变为矩阵或线性算子的指数映射,即

$$\exp X = \mathrm{Exp} X, \tag{1.10}$$

其中,Exp 定义为:若 X 是方阵或 X 是线性算子时,

$$\mathrm{Exp} X = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}X^n. \tag{1.11}$$

回到一般的情形,设 exp 是(1.9)式定义的李群 G 的指数映射,G 上的左不变向量场对函数的作用就可用指数映射具体地写出来.设 $0\neq X\in\mathfrak{g}$,$\widetilde{X}$ 是 X 对应的 G 上的左不变向量场,则对任意的正整数 k,有下式成立:

$$(\widetilde{X}^k f)(x) = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^k f(x\cdot\exp tX)\Big|_{t=0}. \tag{1.12}$$

由(1.12)式,当 f 在 $x\in G$ 的某个邻域内实解析时,就可得到当 t 足够小时,有

$$(\mathrm{Exp}\,t\widetilde{X}f)(x) = f(x\cdot\exp tX). \tag{1.13}$$

由此又可得到当 t 和 s 均足够小时,有

$$\begin{aligned}&(\mathrm{Exp}\,t\widetilde{X}\cdot\mathrm{Exp}\,s\widetilde{Y}f)(x)\\&\quad= f(x\exp tX\cdot\exp sY),\end{aligned} \tag{1.14}$$

在(1.14)式中,$\widetilde{X}$、$\widetilde{Y}$ 分别是 X 和 Y 对应的 G 上的左不变向量场.

在(1.13)和(1.14)式中特别取 x 为 G 的幺元 e,当 t 和 s 均足够小时,由于 $\exp tX\cdot\exp sY$ 是 G 的元,从而有

$$\begin{aligned}&\exp tX\cdot\exp sY\\&\quad=\exp Z(t,s)\\&\quad=\exp(tZ_1+sZ_2+tsZ_3+\cdots),\end{aligned} \tag{1.15}$$

其中 $Z(t,s)$ 在 t 与 s 均足够小时,是 $\mathfrak{g}$ 中过原点的一小片二维的实解析曲面.将 $Z(t,s)$ 在原点附近展开成幂级数,就得到了 $\mathfrak{g}$ 中的切向量 Z_1、Z_2、Z_3、…,它们与 t 与 s 的变化无关,仅依赖于 X 和 Y.

记 $\tilde{Z}_1$、$\tilde{Z}_2$、$\tilde{Z}_3$、…是 Z_1、Z_2、Z_3、…对应的 G 上的左不变向量场，并在 $x=e$ 点用(1.15)式的第二个等式右端表达式将 f 展开成 t 和 s 的幂级数，就可得到当 t 和 s 足够小时，有

$$[\mathrm{Exp}(t\tilde{Z}_1 + s\tilde{Z}_2 + ts\tilde{Z}_3 + \cdots)f](x) = f(\exp tX \cdot \exp sY),$$

将上式与(1.14)式比较，就得到

$$\mathrm{Exp}\,t\tilde{X} \cdot \mathrm{Exp}\,s\tilde{Y} = \mathrm{Exp}(t\tilde{Z}_1 + s\tilde{Z}_2 + ts\tilde{Z}_3 + \cdots). \tag{1.16}$$

将(1.16)式两端用(1.11)式展开，就得到具有算子系数的 t 和 s 的幂级数的恒等式，通过比较系数的方法，原则上就可解出所有的 $\tilde{Z}_1$、$\tilde{Z}_2$、$\tilde{Z}_3$、…用 $\tilde{X}$ 和 $\tilde{Y}$ 来表示的具体表达式. 再通过(1.4)式和(1.7)式定义的映射 Π，就得到 Z_1，Z_2，Z_3…用 X 和 Y 表示的表达式. 而实际的求解 Z_1，Z_2，Z_3，…的方法还要用一些其他的技巧，这在后面将涉及.

当 G 是复李群时，指数映射 $\exp:\mathfrak{g}\to G$ 就是复全纯映照，上面的讨论也相应地成立.

这里需要指出的是，当 G 是一个矩阵复李群时，不仅是指 G 是由复方阵构成，主要是指 G 是一个复流形. 例如 n 阶酉群 U_n 虽然是由复方阵构成，但是它不是一个复李群.

1.2.7 伴随表示与 Killing 型

设 F 是复域 C 或实域 R，$\mathfrak{g}$ 是域 F 上的 n 维李代数，gl(n,F) 是 $\mathfrak{g}$ 上线性变换全体构成的代数. 通过 $\mathfrak{g}$ 的换位运算，对每个 $A\in\mathfrak{g}$，就定义一个 $\mathfrak{g}$ 上的线性变换 adA：

$$adA:\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}, X\to adA(X) = [A,X]. \tag{1.17}$$

而换位运算的 Jacobi 等式，可用 adA 表示成

$$adA([X,Y]) = [adA(X),Y] + [X,adA(Y)]. \tag{1.18}$$

由于(1.18)式，adA 又称为 $\mathfrak{g}$ 的内导子.

gl(n,F)关于矩阵的方括号积是一个矩阵李代数，由于(1.17)式，可得下面的映射：

$$ad:\mathfrak{g}\to \mathrm{gl}(n,\mathrm{F}),\quad X\to adX, \tag{1.19}$$

它是李代数 $\mathfrak{g}$ 到矩阵李代数 $\mathrm{gl}(n,\mathrm{F})$ 中的一个线性同态，即如下(1)、(2)成立：

(1) 对任意的 X、$Y\in\mathfrak{g}$ 和 λ、$\mu\in\mathrm{F}$，有

$$ad(\lambda X+\mu Y)=\lambda adX+\mu adY;$$

(2) 对任意的 X、$Y\in\mathfrak{g}$，有

$$ad[X,Y]=[adX,adY]. \tag{1.20}$$

$ad:\mathfrak{g}\to\mathrm{gl}(n,\mathrm{F})$ 称为 $\mathfrak{g}$ 的**伴随表示**，它的表示空间也是 $\mathfrak{g}$.

当李代数 $\mathfrak{g}$ 是李群 G 的李代数时，不仅 $\mathfrak{g}$ 在 $\mathfrak{g}$ 上有伴随表示(1.19)，G 在 $\mathfrak{g}$ 上也有伴随表示，它是

$$\mathrm{Ad}:G\to\mathrm{GL}(n,\mathrm{F}),\quad a\to \mathrm{Ad}a. \tag{1.21}$$

其中 $\mathrm{GL}(n,\mathrm{F})$ 是 $\mathfrak{g}$ 上非奇线性变换全体构成的矩阵李群，$\mathrm{Ad}a=(\mathrm{d}A_a)_e$ 是内自同构的微分.

由于内自同构 A_a 是微分同胚，且保持 G 的幺元不动，所以 $\mathrm{Ad}a$ 是 $\mathfrak{g}$ 上的非奇线性变换，又由于 $A_aA_b=A_{ab}$，即得

$$\mathrm{Ad}a\mathrm{Ad}b=\mathrm{Ad}(ab),$$

此即 Ad 是李群 G 到矩阵李群 $\mathrm{GL}(n,\mathrm{F})$ 中的同态，所以称 $\mathrm{Ad}:G\to\mathrm{GL}(n,\mathrm{F})$ 为**李群 G 的伴随表示**.

李代数 $\mathfrak{g}$ 上由伴随表示定义的二次型 $B(\cdot,\cdot)$：

$$B(X,Y)=\mathrm{Tr}(adX\cdot adY) \tag{1.22}$$

称为 $\mathfrak{g}$ 上的 Killing 型，其中 $\mathrm{Tr}A$ 表示方阵 A 的迹，即 A 的主对角线元素之和.

Killing 型 $B(\cdot,\cdot)$ 是一个对称二次型. 而由(1.17)式、(1.20)式和(1.22)式还可得 Killing 型的下面的重要性质：

$$B(adA(X),Y)+B(X,adA(Y))=0, \tag{1.23}$$

称 Killing 型的这一性质为 Killing 型关于内导子是不变的.

李群 G 的伴随表示 $\mathrm{Ad}a$ 与内自同构 A_a 有如下的关系：

$$\begin{aligned}A_a(\exp tX)&=a\exp tXa^{-1}\\&=\exp t\mathrm{Ad}a(X)\end{aligned} \tag{1.24}$$

对任意 $X\in\mathfrak{g}$ 和 $a\in G$ 成立.

李群 G 的伴随表示 Ad 与 G 的李代数 $\mathfrak{g}$ 的伴随表示 ad 有如下的关系：

$$Ad\exp X = \operatorname{Exp} adX, \tag{1.25}$$

$$ad(Ada(X)) = Ada\, adX\, Ada^{-1}. \tag{1.26}$$

1.2.8 半单李群和半单李代数

李代数 $\mathfrak{g}$ 称为**半单李代数**，是指 $\mathfrak{g}$ 的 Killing 型是非退化的.

这里 Killing 型非退化，是指若对任意的 $Y\in\mathfrak{g}$，

$$B(X,Y) = 0$$

恒成立，则必有 $X=0$.

与以上半单李代数的定义等价的定义是：$\mathfrak{g}$ 称为**半单李代数**，则 $\mathfrak{g}$ 必可分解成它的单理想的直和，即

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_s, \tag{1.27}$$

它首先是线性空间 $\mathfrak{g}_1,\mathfrak{g}_2,\cdots,\mathfrak{g}_s$ 的直和，且 $\mathfrak{g}_1,\mathfrak{g}_2,\cdots,\mathfrak{g}_s$ 均是 $\mathfrak{g}$ 的理想，且均是非交换的单代数.

若李群 G 的李代数是半单李代数，就称 G 为**半单李群**.

由 1.2.2 节中单代数的定义和 1.2.7 节中伴随表示的定义即可得知半单李代数的中心仅由零元素组成. 记

$$ad\mathfrak{g} = \{adX, X \in \mathfrak{g}\},$$

则 $ad\mathfrak{g}$ 是 $\mathrm{gl}(\mathfrak{g})=\mathrm{gl}(n,\mathrm{F})$ 的矩阵子代数，而且

$$ad: \mathfrak{g} \to ad\mathfrak{g}$$

也是李代数的同态，其同态核仅含 $\mathfrak{g}$ 的零元素，从而它是李代数的同构.

若 G 是连通半单李群，Z 是 G 的中心，则 Z 必是 G 的离散的正规子群，且商群 G/Z 与 AdG 是同构的李群. AdG 看作矩阵李群时，它的矩阵李代数就是 $ad\mathfrak{g}$.

半单李代数的分类问题已经完全解决了. 由以上半单李代数的等价定义，它归结为单李代数的分类问题. 而单李代数的分类问题又归结为复单李代数的分类和复单李代数的实形这样两个问题，这两个问题的解决，读者可在本书参考文献[6]和[5]中找到.

以下简要地介绍复李代数的实形和实李代数的复化.

设 $\mathfrak{g}$ 是一个复李代数，称映射

$$\sigma: \mathfrak{g} \to \mathfrak{g},\ X \to \sigma(X)$$

为 $\mathfrak{g}$ 的一个共轭，是指 σ 适合下面四个性质：

(1) $\sigma^2 = \mathrm{i}d$，即 σ^2 是 $\mathfrak{g}$ 上的恒等变换；

(2) 对任意的 X、$Y \in \mathfrak{g}$，有

$$\sigma(X + Y) = \sigma(X) + \sigma(Y);$$

(3) 对任意的 $X \in \mathfrak{g}$ 和复数 a，有

$$\sigma(aX) = \bar{a}\sigma(X),$$

其中 $\bar{a}$ 是 a 的共轭复数；

(4) 对任意的 X、$Y \in \mathfrak{g}$，有

$$\sigma([X,Y]) = [\sigma(X),\sigma(Y)].$$

记 $\mathfrak{g}_0$ 为 $\mathfrak{g}$ 在 σ 下的不动点集，即

$$\mathfrak{g}_0 = \{X \in \mathfrak{g},\ \sigma(X) = X\}.$$

由 σ 的性质(2)和(3)可得 $\mathfrak{g}_0$ 是 $\mathfrak{g}$ 的实线性子空间. 再由 σ 的性质(1)以及

$$X = \frac{1}{2}(X + \sigma(X)) + \frac{1}{2}(X - \sigma(X)) = X_1 + X_2,$$

可得 X_1、$\mathrm{i}X_2 \in \mathfrak{g}_0$，从而 $\mathfrak{g}_0$ 的实维数就等于 $\mathfrak{g}$ 的复维数. 最后由 σ 的性质(4)可得 $\mathfrak{g}$ 的换位运算在 $\mathfrak{g}_0$ 中封闭，从而定义了 $\mathfrak{g}_0$ 上的换位运算，即 $\mathfrak{g}_0$ 是 $\mathfrak{g}$ 的实的子李代数，$\mathfrak{g}_0$ 称为 $\mathfrak{g}$ 的(关于共轭 σ 的)一个实形.

反之，若 $\mathfrak{g}_0$ 是一个实李代数，令

$$\mathfrak{g} = \{X + \mathrm{i}Y, X、Y \in \mathfrak{g}\},$$

并在 $\mathfrak{g}$ 上定义一个由 $\mathfrak{g}_0$ 的换位运算[·,·]诱导的换位运算，即对任意的 X、Y、A、$B \in \mathfrak{g}_0$，置

$$[X + \mathrm{i}Y, A + \mathrm{i}B] = [X,A] - [Y,B] + \mathrm{i}[Y,A] + \mathrm{i}[X,B],$$

则 $\mathfrak{g}$ 是一个复李代数，$\mathfrak{g}$ 称为实李代数 $\mathfrak{g}_0$ 的复化. 在 $\mathfrak{g}$ 中定义如下的共轭 σ：

$$\sigma(X + \mathrm{i}Y) = X - \mathrm{i}Y$$

对任意 X、$Y\in\mathfrak{g}_0$ 均成立. 则 $\mathfrak{g}$ 关于共轭 σ 的实形就是 $\mathfrak{g}_0$.

1.2.9 复半单李代数的 Cartan 分解

设 $\mathfrak{g}$ 是一个复半单李代数，$\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个子李代数，称 $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个 Cartan 子代数，是指 $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个极大的交换子李代数，这里 $\mathfrak{h}$ 的极大性是指：若对任意的 $H\in\mathfrak{h}$，$[X,H]=0$ 恒成立，则必有 $X\in\mathfrak{h}$.

由 $\mathfrak{h}$ 的交换性和换位运算的复双线性性质，容易验证复半单李代数的 Cartan 子代数必然是复的极大交换于代数.

考虑复半单李代数 $\mathfrak{g}$ 的一个 Cartan 子代数 $\mathfrak{h}$ 在 $\mathfrak{g}$ 上的伴随表示 $a\mathrm{d}\mathfrak{h}$.

由 $\mathfrak{h}$ 的交换性可得，对任意两个 $\mathfrak{h}$ 中的元 H 和 H'，

$$a\mathrm{d}H\cdot a\mathrm{d}H' = a\mathrm{d}H'\cdot a\mathrm{d}H$$

恒成立. 设 $\mathfrak{h}$ 是复 l 维的，$H_1,H_2,\cdots,H_l$ 是 $\mathfrak{h}$ 的一组基，则 $a\mathrm{d}H_1$，$a\mathrm{d}H_2,\cdots,a\mathrm{d}H_l$ 是两两交换的线性变换，由线性代数中的已知结果，$\mathfrak{g}$ 分解为这 l 个线性变换的公共特征子空间的直和：

$$\mathfrak{g} = \sum_{\alpha\in\Delta}\mathfrak{g}^{\alpha}, \tag{1.28}$$

在一个公共特征子空间 $\mathfrak{g}^{\alpha}$ 上，$a\mathrm{d}H_k$ 的特征值记为 α_k $(k=1,2,\cdots,l)$，则存在正整数 m_k $(k=1,2,\cdots,l)$，使得

$$(a\mathrm{d}H_k-\alpha_k I)^{m_k}X = 0 \quad (k=1,2,\cdots,l) \tag{1.29}$$

对任意的 $X\in\mathfrak{g}^{\alpha}$ 成立. 而在两个不同的公共特征于空间 $\mathfrak{g}^{\alpha}$ 和 $\mathfrak{g}^{\beta}$ 上，至少存在一个 H_k，使 $a\mathrm{d}H_k$ 在 $\mathfrak{g}^{\alpha}$ 和 $\mathfrak{g}^{\beta}$ 上的特征值不同.

设 $H\in\mathfrak{h}$，则 H 可用基 $H_1,\cdots,H_l$ 表示成

$$H = \sum_{k=1}^{l}\lambda_k H_k. \tag{1.30}$$

则(1.28)式中每一个特征子空间 $\mathfrak{g}^{\alpha}$ 也是 $a\mathrm{d}H$ 的特征子空间，它的特征值是

$$\alpha(H) = \sum_{k=1}^{l}\alpha_k\lambda_k, \tag{1.31}$$

这可由

$$(\mathrm{ad}H-\alpha(H)I)^m=\Big(\sum_{k=1}^{l}\lambda_k(\mathrm{ad}H_k-\alpha_kI)\Big)^m$$
$$=\sum_{s_1+\cdots+s_l=m}\frac{m!}{s_1!\cdots s_l!}\prod_{k=1}^{l}\lambda_k^{s_k}(\mathrm{ad}H_k-\alpha_kI)^{s_k},\tag{1.32}$$

当 $m\geqslant m_1+m_2+\cdots+m_l$ 时(1.32)式的每个积中至少有一个 s_k 大于或等于(1.29)式中的 m_k 而得到.

上面的讨论说明了在 $\mathfrak{h}$ 的伴随表示之下,$\mathfrak{g}$ 分解成 $\mathrm{ad}\mathfrak{h}$ 的公共特征子空间的直和(1.29)式.对每个特征子空间 $\mathfrak{g}^\alpha$,对应了 $\mathfrak{h}$ 上的一个线性函数 α,使得对任意一个 $H\in\mathfrak{h}$,$\mathrm{ad}H$ 的特征值为 $\alpha(H)$,在前面所述的基 $H_1,\cdots,H_l$ 之下,$\alpha(H)$由(1.30)和(1.31)式表示,且存在一个正整数 m,使对一切 $H\in\mathfrak{h}$ 及 $X\in\mathfrak{g}^\alpha$ 恒有下式成立:

$$(\mathrm{ad}H-\alpha(H)I)^mX=0.\tag{1.33}$$

而对不同的公共特征子空间 $\mathfrak{g}^\alpha$ 和 $\mathfrak{g}^\beta$,线性函数 α 和 β 是不同的.

上述 $\mathfrak{h}$ 上的线性函数 α 称为 $\mathfrak{h}$ 在 $\mathfrak{g}$ 上伴随表示的权,简称为 $\mathfrak{g}$ 的权.以 Δ 记为全体权的集合.$\mathfrak{h}$ 在 $\mathfrak{g}$ 上伴随表示的非零权称为 $\mathfrak{h}$ 在 $\mathfrak{g}$ 上伴随表示的根,简称为 $\mathfrak{g}$ 的根,并用 Σ 表示全体根的集合.(1.28)式中的 $\mathfrak{g}^\alpha$ 称为权 α 的权子空间.当 $\alpha\neq0$ 是根时,(1.28)式中的 $\mathfrak{g}^\alpha$ 就称为根 α 的根子空间.每个根子空间中均有一个非零向量 E_α 为 $\mathrm{ad}\mathfrak{h}$ 的公共特征向量,即有

$$\mathrm{ad}H(E_\alpha)=\alpha(H)E_\alpha,E_\alpha\neq0\tag{1.34}$$

对一切 $H\in\mathfrak{h}$ 成立,E_α 称为 $\mathfrak{g}^\alpha$ 中的一个根向量.

由于 $\mathfrak{h}$ 的交换性,$\mathrm{ad}\mathfrak{h}$ 必有零权.记(1.28)式中的零权空间为 $\mathfrak{g}^0$,由 $\mathfrak{h}$ 的极大性易得

$$\mathfrak{g}^0=\mathfrak{h}.\tag{1.35}$$

这就得到了复半单李代数的 Cartan 分解,它是 $\mathfrak{h}$ 在 $\mathfrak{g}$ 上伴随表示的权子空间的直和分解:

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{h}+\sum_{\alpha\in\Sigma}\mathfrak{g}^\alpha.\tag{1.36}$$

复半单李代数的 Cartan 分解具有下面的性质：

(1) 根子空间 $\mathfrak{g}^{\alpha}$，$\alpha\in\Sigma$，均是复一维的.

(2) 若 $\alpha\in\Sigma$，则 $-\alpha\in\Sigma$，而当整数 $k\neq\pm1$ 时，$k\alpha\overline{\in}\Sigma$.

(3) $\mathfrak{g}^{\alpha}$ 中的非零向量称为根向量，记为 E_{α}，则对一切 $H\in\mathfrak{h}$，有下式成立：

$$[H,E_{\alpha}]=\alpha(H)E_{\alpha}.$$

(4) 对每个根向量 E_{α}，存在根向量 $E_{-\alpha}$，使得

$$B(E_{\alpha},E_{-\alpha})=1,\ [E_{\alpha},E_{-\alpha}]=H_{\alpha},\tag{1.37}$$

其中 $H_{\alpha}\in\mathfrak{h}$，适合

$$B(H_{\alpha},H)=\alpha(H).$$

(5) 若 α、$\beta\in\Sigma$，且 $\alpha+\beta\in\Sigma$，则有

$$[E_{\alpha},E_{\beta}]=N_{\alpha\beta}E_{\alpha+\beta},\ N_{\alpha\beta}\neq0;$$

若 α、$\beta\in\Sigma$，$\alpha+\beta\neq0$，且 $\alpha+\beta\overline{\in}\Sigma$，则有

$$[E_{\alpha},E_{\beta}]=0.$$

(6) 适当选取 E_{α}，$\alpha\in\Sigma$，可使 $N_{\alpha\beta}$均为实数，且

$$N_{\alpha\beta}=-N_{-\alpha-\beta}.\tag{1.38}$$

(7) 复半单李代数的下面这组基

$$\{H_1,\cdots,H_l,\ E_{\alpha},\alpha\in\Sigma\}\tag{1.39}$$

称为一组 Weyl 基是指：E_{α}，$\alpha\in\Sigma$，适合(1.37)式和(1.38)式，且 $H_1,\cdots,H_l$ 是 $\mathfrak{h}$ 的一组基.

由上面得到的结果，对复半单李代数的进一步的研究就转为对根系 Σ 的研究，首先要有下面的准备，主要结果有：

(1) $\mathfrak{g}$ 的 Killing 型在 $\mathfrak{h}$ 上的限制非退化.

(2) 记 $\mathfrak{h}^*$ 为 $\mathfrak{h}$ 上的复线性函数所成的 l 维复线性空间，Killing 型 $B(\cdot,\cdot)$诱导了 $\mathfrak{h}^*$ 到 $\mathfrak{h}$ 中的嵌入：$\mu\in\mathfrak{h}^*\to H_{\mu}\in\mathfrak{h}$，使对一切 $H\in\mathfrak{h}$ 下式恒成立：

$$\mu(H)=B(H_{\mu},H).\tag{1.40}$$

因为 Killing 型非退化，这一嵌入是 $\mathfrak{h}^*$ 到 $\mathfrak{h}$ 上的线性同构，且诱导了 $\mathfrak{h}^*$ 上的一个非退化二次型：

$$B(\alpha,\beta)\equiv B(H_{\alpha},H_{\beta}),\alpha,\beta\in\mathfrak{h}^*.\tag{1.41}$$

(3) 根系 Σ 中有 l 个线性无关的根,这里 l 是 $\mathfrak{h}$ 的复维数,且对任意的 α、$\beta\in\Sigma$,有 $B(\alpha,\beta)$ 均为实数,$B(\alpha,\alpha)>0$. 从而 $B(\cdot,\cdot)$ 是

$$\mathfrak{h}_0^* = \left\{\sum_{\varphi\in\Sigma} a_\varphi\varphi, a_\varphi \text{ 为实数}\right\} \tag{1.42}$$

上的欧氏内积,而 $\mathfrak{h}_0^*$ 是实 l 维的欧氏空间.

(4) 在欧氏空间中可建立字典序如下:设 $x=(x_1,\cdots,x_l)$,$y=(y_1,\cdots,y_l)$,$x=y$ 就是欧氏空间中向量相等,$x>y$ 是指存在正整数 k,使得

$$x_1 = y_1,\cdots,x_{k-1} = y_{k-1}, \text{但是 } x_k > y_k.$$

在上述序下,称 $x>0$ 为正向量,$x<0$ 为负向量.

复半单李代数的根系有以下性质:

(1) 若 $\alpha\in\Sigma$,则 $-\alpha\in\Sigma$,但如 $k\neq\pm1$,则 $k\alpha\overline{\in}\Sigma$.

(2) 若 α、$\beta\in\Sigma$,$\alpha\neq\pm\beta$,且对 $-p\leqslant k\leqslant q$, $\beta+k\alpha\in\Sigma$,但是 $\beta+(q+1)\alpha\overline{\in}\Sigma$, $\beta-(p+1)\alpha\overline{\in}\Sigma$,则有

$$2B(\beta,\alpha)/B(\alpha,\alpha) = -(q-p).$$

(3) 若 α、$\beta\in\Sigma$,则

$$\beta - 2B(\beta,\alpha)\alpha/B(\alpha,\alpha) \in \Sigma.$$

当在 $\mathfrak{h}^*$ 中引进一个字典序后,根系 Σ 就分成正根系 Σ_+ 和负根系 Σ_- 的并,即

$$\Sigma = \Sigma_+ \cup \Sigma_-.$$

若 $\alpha\in\Sigma_+$,则必有 $-\alpha\in\Sigma_-$,反之也一样.

正根系中的一个正根如不能分解成另外两个正根的和就称它为一个**素根**,例如正根系 Σ_+ 中序最小的正根就是素根. Σ_+ 中全体素根的集记为 Π,Π 称为 Σ 的一个**素根系**.

素根系 Π 有以下的性质:

(1) Π 由 l 个线性无关的正根组成,这里 l 是 Cartan 子代数 $\mathfrak{h}$ 的复维数.

(2) 若 α、$\beta\in\Pi$ 且 $\alpha\neq\beta$,则 $B(\alpha,\beta)\leqslant0$,且

$$2B(\beta,\alpha)/B(\alpha,\alpha) \text{ 和 } 2B(\alpha,\beta)/B(\beta,\beta)$$

均为非正的整数.

(3) 设 $\Pi=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_l\}$，则对 $\alpha\in\Sigma$ 有

$$\alpha=\pm(m_1\alpha_1+m_2\alpha_2+\cdots+m_l\alpha_l),$$

其中 $m_1,\cdots,m_l$ 均为非负整数，且等式右端的符号由根 α 的符号决定，即 $\alpha>0$ 取正号，$\alpha<0$ 取负号.

根系和素根系的一个重要作用在于复半单李代数由它的根系完全决定，特别由素根系完全决定.

1.2.10　复半单李代数的自同构群与 Weyl 群

复半单李代数 $\mathfrak{g}$ 上的一个非异的线性变换 A，若适合对于一切的 X、$Y\in\mathfrak{g}$，有

$$A[X,Y]=[AX,AY] \tag{1.43}$$

均成立，就称 A 为 $\mathfrak{g}$ 的一个自同构.

$\mathfrak{g}$ 上全体自同构组成了 $\mathfrak{g}$ 的自同构群 $\mathrm{Aut}\mathfrak{g}$，它是一个矩阵李群，是 $\mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ 的矩阵子李群.

复半单李代数 $\mathfrak{g}$ 上的线性变换 D 若适合

$$D[X,Y]=[DX,Y]+[X,DY], \tag{1.44}$$

则称 D 为 $\mathfrak{g}$ 的一个导子，$\mathfrak{g}$ 的导子全体记为 $\mathrm{aut}\mathfrak{g}$，它是一个矩阵李代数，且是 $\mathrm{gl}(\mathfrak{g})$ 的子李代数，而且 $\mathrm{aut}\mathfrak{g}$ 还是 $\mathrm{Aut}\mathfrak{g}$ 的李代数. 实际上，用(1.44)式具体计算 $\mathrm{Exp}tD$ 对 $[X,Y]$ 的作用，可得到若 $D\in\mathrm{aut}\mathfrak{g}$ 必有 $\mathrm{Exp}tD\in\mathrm{Aut}\mathfrak{g}$.

复半单李代数的导子必为内导子，即必是某个 adX，$X\in\mathfrak{g}$. 而

$$Ad\mathfrak{g}\equiv\{\mathrm{Exp}adX, X\in\mathfrak{g}\},$$

则称为 $\mathfrak{g}$ 的内自同构群.

复半单李代数的一个重要性质就是它的任意两个 Cartan 子代数必在内自同构群之下共轭. 具体地说，若 $\mathfrak{h}_1$ 和 $\mathfrak{h}_2$ 是 $\mathfrak{g}$ 的两个 Cartan 子代数，则必然存在 $A\in Ad\mathfrak{g}$，使得

$$A(\mathfrak{h}_1)=\mathfrak{h}_2.$$

设 N 和 Z 分别是 $\mathfrak{h}$ 在 $Ad\mathfrak{g}$ 中的正规化子和中心化子，即

$$N=\{A\in Ad\mathfrak{g}, A(\mathfrak{h})\subset\mathfrak{h}\},$$

$$Z=\{A\in Ad\mathfrak{g}, A(X)=X, X\in\mathfrak{h}\},$$

其中 Z 还可具体写为

$$Z = \{\mathrm{Expad}H, H \subset \mathfrak{h}\}.$$

$\mathfrak{g}$ 的 Weyl 群 W 就定义为

$$W = N/Z.$$

记 $\mathfrak{h}_0$ 为

$$\mathfrak{h}_0 = \left\{\sum_{\varphi\in\Sigma} a_\varphi h_\varphi, a_\varphi \text{ 为实数}\right\},$$

则 $\mathfrak{h}_0$ 上的实线性函数组成的线性空间就是(1.41)式定义的 $\mathfrak{h}_0^*$，而 $\sigma\in W$ 在 $\mathfrak{h}_0$ 上的作用就定义了 $\mathfrak{h}_0^*$ 上的 Weyl 群，仍记为 W，它由下式定义：

$$\sigma(\mu)(H) = B(\sigma(H_\mu), H), \sigma \in W,$$

对一切 $H\in\mathfrak{h}_0$ 成立.

Weyl 群 W 具有下面的性质：

(1) 对 $\alpha\in\Sigma$，S_α 是根 α 决定的反射，即

$$S_\alpha(\xi) = \xi - 2B(\xi,\alpha)\alpha/B(\alpha,\alpha), \qquad (1.45)$$

对一切 $\xi\in\mathfrak{h}_0^*$ 成立，则 Weyl 群 W 由所有的 S_α 生成.

(2) 设 $\Pi=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_l\}$是素根系，则 W 由所有的 S_{α_k} $(k=1,2,\cdots,l)$所生成，即任一 $\sigma\in W$ 可表示成若干个 S_{α_k} $(k=1,2,\cdots,l)$的乘积.

由根系 Σ 的性质(3)可推出 S_α 是 Σ 中根的一个置换，由此可得

(3) Weyl 群中的元在 Σ 上的作用是 Σ 中根的一个置换.

(4) 素根 α_k 决定的反射 S_{α_k}将 α_k 变成$-\alpha_k$，并将其余的正根仍变成正根，即是 $\Sigma_+\backslash\{\alpha_k\}$中正根的一个置换.

(5) 记 $\mathfrak{h}_0^*$ 中的超平面 P_α^* 为

$$P_\alpha^* = \{\xi \in \mathfrak{h}_0^*, B(\xi,\alpha) = 0\},$$

$\mathfrak{h}_0^*$ 去掉所有的 P_α^*，$\alpha\in\Sigma$ 后，则是若干个连通开集的并集，每个连通开集称为一个 Weyl *房*. 则 Weyl 群在 Weyl 房上的作用是 Weyl 房间的置换，任一 Weyl 房 $C_1$2 必可通过 $\sigma\in W$ 变成某一 Weyl 房 C_2，而 $\sigma\in W$ 使得 $\sigma(C_1)=C_1$，则 σ 必为恒等变换.

1.2.11 复半单李代数的紧致实形

设 $\mathfrak{g}$ 是一个复半单李代数，σ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个共轭，$\mathfrak{g}_0$ 是 $\mathfrak{g}$ 关于共轭 σ 的实形，$B(\cdot,\cdot)$是 $\mathfrak{g}$ 的 Killing 型，则它可定义 $\mathfrak{g}$ 上非退化的 Hermite 二次型：

$$B_\sigma(X,Y)=B(X,\sigma(Y)),X、Y\in\mathfrak{g}.$$

若 $B_\sigma(\cdot,\cdot)$在 $\mathfrak{g}$ 上定负，就称 $\mathfrak{g}_0$ 为 $\mathfrak{g}$ 的一个紧致实形，其中 $B_\sigma(\cdot,\cdot)$在 $\mathfrak{g}$ 上定负，等价于 $B(\cdot,\cdot)$在 $\mathfrak{g}_0$ 上定负.

设 $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个 Cartan 子代数，取

$$\{H_1,\cdots,H_l,E_\alpha,\alpha\in\Sigma\}$$

是 $\mathfrak{g}$ 的 Weyl 基，其中 $H_1,\cdots,H_l$ 是 $\mathfrak{h}_0$ 的一组基，则可定义 $\mathfrak{g}$ 上的共轭 τ，它对 Weyl 基的作用是

$$\tau(H)=-H,\ H\in\mathfrak{h}_0,$$
$$\tau(E_\alpha)=-E_{-\alpha},\ \alpha\in\Sigma,$$

则 $\mathfrak{g}$ 关于 τ 的紧实型 $\mathfrak{g}_u$ 的基是

$$\left\{\mathrm{i}H_1,\cdots,\mathrm{i}H_l,X_\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}(E_\alpha-E_{-\alpha}),\right.$$
$$\left.X_{-\alpha}=\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}(E_\alpha+E_{-\alpha}),\alpha\in\Sigma_+\right\}. \qquad (1.46)$$

§1.3 紧致李群与紧致齐性空间

1.3.1 紧致李群

若李群 G 是一个紧致流形，G 就是紧致李群. 我们只考虑连通的紧致李群，因为非连通的紧致李群仅是一个连通紧致李群与一个有限群的乘积. 其次，我们只考虑 G 是非交换的，因为交换的紧致李群就是环群，它的 Fourier 分析就是经典的多重 Fourier 级数.

由 1.2.6 节中的(1.8)式，连通紧致李群 G 上定义了一个左不变 Riemann 度量，从而定义了 G 上的一个左不变 Haar 测度 $\mathrm{d}x$.

任取 G 的李代数 $\mathfrak{g}$ 上的一个欧氏内积 $(\cdot,\cdot)$，令

$$B(X,Y)=\int_G(Adx^{-1}(X),Adx^{-1}(Y))\mathrm{d}x, \qquad (1.47)$$

由于 G 紧致，(1.47)式的积分恒有意义，且容易验证 $B(\cdot,\cdot)$ 是正定对称的二次型，从而它仍然是 $\mathfrak{g}$ 上的一个欧氏内积. 再由 $\mathrm{d}x$ 的左不变性质得到

$$\begin{aligned}
&B(Ady(X),Ady(Y))\\
&=\int_G(Adx^{-1}Ady(X),Adx^{-1}Ady(Y))\mathrm{d}x\\
&=\int_G(Ad(y^{-1}x)^{-1}(X),Ad(y^{-1}x)^{-1}(Y))\mathrm{d}x\\
&=\int_G(Adx^{-1}(X),Adx^{-1}(Y))\mathrm{d}x\\
&=B(X,Y). \qquad (1.48)
\end{aligned}$$

现在用 $\mathfrak{g}$ 上的内积 $B(\cdot,\cdot)$ 来按(1.8)式定义 G 上的左不变 Riemann 度量，则它不仅是左不变的，而且是右不变的，这由

$$\begin{aligned}
&g_{xa}(\mathrm{d}R_a(X),\mathrm{d}R_a(Y))\\
&=B((\mathrm{d}L_{xa})^{-1}\mathrm{d}R_a(X),(\mathrm{d}L_{xa})^{-1}\mathrm{d}R_a(Y))\\
&=B(Ad(xa)^{-1}\circ\mathrm{d}L_x{}^{-1}(X),Ad(xa)^{-1}\circ\mathrm{d}L_x{}^{-1}(Y))\\
&=B(\mathrm{d}L_x{}^{-1}(X),\mathrm{d}L_x{}^{-1}(Y))\\
&=g_x(X,Y)
\end{aligned}$$

对任意的 X、$Y\in T_x(G)$ 成立，从而 $g(\cdot,\cdot)$ 右不变. 这就定义了连通紧致李群 G 上的双不变 Riemann 度量，从而定义了 G 上的双不变 Haar 测度，简称 Haar 测度，仍然记为 $\mathrm{d}x$.

在(1.48)式中取 $y=\exp tZ$，并对 t 在 $t=0$ 点求导，可得

$$B(adZ(X),Y)+B(X,adZ(Y))=0 \qquad (1.49)$$

对任意的 X、Y、$Z\in\mathfrak{g}$ 均成立.

设 $\mathfrak{z}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的中心，令

$$\begin{aligned}
\mathfrak{g}_1&=\{X\in\mathfrak{g},B(X,Y)=0,\text{对一切 }Y\in\mathfrak{z}\text{ 成立}\}\\
&\neq\{0\},
\end{aligned}$$

则对任意的 $Z\in\mathfrak{g}$，$X\in\mathfrak{g}_1$ 和 $Y\in\mathfrak{z}$，由(1.49)式得

$$B([Z,X],Y) = -B(X,[Z,Y]) = 0$$

恒成立，所以 $\mathfrak{g}_1$ 是 $\mathfrak{g}$ 的理想. 又因为非半单的李代数必有一个非零的交换理想，所以若 $\mathfrak{g}_1$ 为非半单李代数，它必有一个非零交换理想 z_1，再令

$$\mathfrak{g}_2 = \{X \in \mathfrak{g}_1, B(X,Y) = 0, \text{对一切 } Y \in z_1 \text{ 成立}\},$$

由 z_1 的理想性质，同证明 $\mathfrak{g}_1$ 是理想一样，可证明 $\mathfrak{g}_2$ 是 $\mathfrak{g}_1$ 的理想. 因为 z_1 和 $\mathfrak{g}_2$ 是 $\mathfrak{g}_1$ 互相正交的理想，所以 $\mathfrak{g}_1$ 是这两个理想的直和. 因此对任意的 $Z \in z_1$ 和 $X \in \mathfrak{g}_2$，就必有$[Z,X]$恒为零，这说明了 z_1 是 $\mathfrak{g}_1$ 的非零中心，这样就得到了 $z \oplus z_1$ 也是 $\mathfrak{g}$ 的中心，且 z_1 非零，这就与 z 是 $\mathfrak{g}$ 的中心的定义相矛盾，所以 $\mathfrak{g}_1$ 必然为半单李代数.

上面的论证说明了一个紧致李群 G，它或者是一个交换的紧致李群，这时 G 就是一个 n 维环群——即 n 个单位圆周的直乘积；或者 G 是一个非交换的紧致李群，当 G 连通时，G 和它的李代数 $\mathfrak{g}$ 适合下式：

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus z,\ G = (G_1 \times \tilde{T})/Z, \tag{1.50}$$

其中 G_1 是一个单连通的半单紧致李群，它的李代数是半单紧致李代数 $\mathfrak{g}_1$，z 是 $\mathfrak{g}$ 的中心，$\tilde{T}$ 是 z 对应的有限维环群，Z 是 $G_1 \times \tilde{T}$ 的中心的有限子群. 特别若 $z=\{0\}$，则 $\mathfrak{g}$ 就是紧致半单李代数 $\mathfrak{g}_1$，$G=G_1/Z$ 是紧致的半单李群.

1.3.2 紧维李群的 Cartan 子群

紧致李群 G 的一个极大交换子李群 T 称为 G 的一个 Cartan 子群，T 对应的 $\mathfrak{g}$ 的子代数 $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个极大交换子代数，$\mathfrak{h}$ 称为 $\mathfrak{g}$ 的一个 Cartan 子代数. 当 G 为非交换时，$\mathfrak{g}$ 的复化 $\mathfrak{g}^C$ 就是复半单李代数 $\mathfrak{g}_1^C$ 和中心 z^C 的直和，而 $\mathfrak{h}^C$ 就是 $\mathfrak{g}^C$ 的 Cartan 子代数. 根据(1.39)式和(1.46)式，可设$\{\mathrm{i}H_1,\cdots,\mathrm{i}H_r\}$是 $\mathfrak{h}$ 的一组基，其中$\{\mathrm{i}H_1,\cdots,\mathrm{i}H_l\}$ $(l\leqslant r)$是 $\mathfrak{g}_1$ 的 Cartan 子代数 $\mathfrak{g}_1 \cap \mathfrak{h}$ 的一组基，则 $\mathfrak{g}^C$ 的 Weyl 基取为

$$\{H_1,\cdots,H_r,E_\alpha,\alpha \in \Sigma\},$$

而 $\mathfrak{g}$ 的 Weyl 基则是：

$$\left\{\mathrm{i}H_1,\cdots,\mathrm{i}H_r,X_\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}(E_\alpha-E_{-\alpha}),\right.$$
$$\left.X_{-\alpha}=\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}(E_\alpha+E_{-\alpha}),\alpha\in\Sigma_+\right\}.\qquad(1.51)$$

设 exp 是 $\mathfrak{g}$ 到 G 上的指数映射，$\exp^{-1}e$ 表示指数映射之下 G 的幺元 e 的完全反象. 将指数映射限制在 $\mathfrak{h}$ 上，并将 $\mathfrak{h}$ 看作一个欧氏空间，从而是一个非紧致的交换李群，则 $\exp:\mathfrak{h}\to T$ 就是李群的同态，其同态核就是 $\exp^{-1}e\cap\mathfrak{h}$，它是 $\mathfrak{h}$ 上的格点集，称为 G 的特征格.

从这一观点来看，指数映射 exp 在 $\mathfrak{h}$ 上的限制具有下面性质，当 G 连通时：

(1) $T\cong\mathfrak{h}/(\exp^{-1}e\cap\mathfrak{h})$. (1.52)

(2) 若 $t\in T,H\in\mathfrak{h}$ 使得 $t=\exp H$ 成立，则

$$t=\exp(\lambda+H),\lambda\in\exp^{-1}e\cap\mathfrak{h}$$

对一切 $\lambda\in\exp^{-1}e\cap\mathfrak{h}$ 成立.

(3) 若 f 是 T 上的函数，则 $f\circ\exp$ 就是 $\mathfrak{h}$ 上的函数，且对一切 $H\in\mathfrak{h}$ 和 $\lambda\in\exp^{-1}e\cap\mathfrak{h}$ 下式恒成立：

$$f\circ\exp(\lambda+H)=f\circ\exp H.\qquad(1.53)$$

(4) 存在 $\mathfrak{h}$ 中的一个以原点为中心的平行多面体 Q 称为 T 的积分区域，它适合：

$$T=\exp Q,\qquad(1.54)$$

且指数映射是 Q 的内部到 T 的一个稠密开子集上的微分同胚.

连通紧致李群 G 的 Cartan 子群有下面两个重要的性质：

(1) G 的任意两个 Cartan 子群均互相共轭，即存在 G 的一个内自同构，将一个 Cartan 子群变为另外一个.

(2) 若 T 是 G 的一个 Cartan 子群，则 G 中任意一点 $x\in G$，必与 T 中某一点 t 共轭，即存在 $y\in G$，使下式成立：

$$x=A_y(t)=yty^{-1}.\qquad(1.55)$$

相应地，对 G 的李代数 $\mathfrak{g}$ 中任意一点 X，必存在 $A\in AdG$ 和 $H\in\mathfrak{h}$，使得 $X=A(H)$，且 $\mathfrak{g}$ 的任意两个 Cartan 子代数也互相共

轭.

设 T 是 G 的 Cartan 子群,T 在 G 中的正规化子 N 和中心化子 Z 分别是

$$N=\{x\in G, xTx^{-1}=T\},$$
$$Z=\{x\in G, xtx^{-1}=t, \forall\, t\in T\},$$

而 $W=N/T$ 称为 G 的 Weyl 群.而 W 的微分就是 G 的李代数 $\mathfrak{g}$ 和 $\mathfrak{g}$ 的复化 $\mathfrak{g}^{C}$ 的 Weyl 群.

1.3.3 紧致齐性空间

一个紧致齐性空间 M,首先是一个连通的紧致 Riemann 流形,且 M 上的等度量变换群在 M 上的作用是可递的,即对 M 中的任意两点,存在 M 上的一个等度量变换,将其中的一点变为另外一点.

对一个 Riemann 流形 N,它的等度量变换是这样定义的.设 $g(\cdot,\cdot)$是 N 的 Riemann 度量,$\phi: N\to N$ 是微分同胚,若对一切 $x\in N$ 和一切的 $X,Y\in T_x(N)$,下式恒成立:

$$g_x(X,Y)=g_{\phi(x)}(\mathrm{d}\phi_x(X),\mathrm{d}\phi_x(Y)), \tag{1.56}$$

就称 ϕ 是一个等度量变换.其中 $T_x(N)$是 N 在 x 点的切空间,$\mathrm{d}\phi_x$ 是 ϕ 在 x 点的微分.

设 G 为 M 的等度量变换群的含幺元的连通分支,则 G 是一个紧致李群,且 G 在 M 上可递.对 $o\in M$,G 在 o 点的迷向子群记为 K,则 K 或为有限群,或为紧致李群,而 G/K 则与 M 等距同构.

G 中元 x 在 M 上产生的等度量变换记为

$$x: M\to M, m\in M\to x\cdot m\in M. \tag{1.57}$$

K 中元在 M 上的作用保持 o 点不动,对 $k\in K$,$(\mathrm{d}k)_o$ 是 k 在 o 点微分,则 $k\to(\mathrm{d}k)_o$ 就是 K 在切空间 $T_o(M)$上的表示,称为 K 的迷向表示.当 K 为紧致李群时,G 的李代数 $\mathfrak{g}$ 就有下面的正交直和分解:

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{k}+\mathfrak{p}, \tag{1.58}$$

其中 $\mathfrak{k}$ 是 K 对应的 $\mathfrak{g}$ 中的子代数.在 K 于 $\mathfrak{g}$ 上的伴随表示下,$\mathfrak{p}$

是 $\mathrm{Ad}K$ 的不变子空间，$\mathrm{Ad}K$ 在 $\mathfrak{p}$ 上的限制也是 K 的一个表示. 这个表示与上面 K 的迷向表示等价，所以可将 $\mathfrak{p}$ 与 M 在 o 点的切空间 $T_o(M)$ 等同起来.

记 $P=\exp\mathfrak{p}$，则 P 与 M 微分同胚，使对每个 $m\in M$，存在唯一的 $p(m)\in P$，使得

$$m = p(m)\cdot o. \tag{1.59}$$

1.3.4 Laplace－Beltrami 算子

设 M 是一个 Riemann 流形，$g(\cdot,\cdot)$是 M 的 Riemann 度量. 在局部坐标系$\{x\}$中，M 的 Laplace-Beltrami 算子 Δ 可表示成

$$\Delta f = \frac{1}{\sqrt{g}}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_k}\left\{\sum_{i=1}^{n} g^{ik}\sqrt{g}\frac{\partial f}{\partial x_i}\right\},$$

其中 $n=\dim M$，f 是 M 上的 C^∞ 函数；

$$g_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial x_i},\frac{\partial}{\partial x_j}\right),\quad (g^{ij}) = (g_{ij})^{-1},$$

$$\bar{g} = |\det(g_{ij})|.$$

下面给出李群的指数映射的两个公式：

引理 1.1 设 $\exp:\mathfrak{g}\to G$ 是李群 G 的指数映射，任取 X、$Y\in\mathfrak{g}$，当 t 足够小时，下面等式成立：

$$\begin{aligned}&\exp(X+tY)\\&=\exp X\cdot\exp\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}t^kA_k(X,Y)\right\},\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}A_1(X,Y)&=\frac{I-\mathrm{e}^{-\mathrm{ad}X}}{\mathrm{ad}X}(Y)\\&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k+1)!}(\mathrm{ad}X)^k(Y),\\A_2(X,Y)&=\sum_{l,s=0}^{\infty}\frac{(-1)^{l+s}}{(2+l+s)l!(s+1)!}\\&\quad\times[(\mathrm{ad}X)^l(Y),(\mathrm{ad}X)^s(Y)].\end{aligned}$$

一般地，若记

$$F_k = F_k(X,Y) = (-1)^k(\mathrm{ad}X)^k(Y)/(k+1)!,$$

则当 $k\geqslant 2$ 时，有下式成立：

$$A_k(X,Y)$$

$$=\sum_{n\in Z_+^k} a_n\, \mathrm{ad}F_{n_1}\mathrm{ad}F_{n_2}\cdots \mathrm{ad}F_{n_{k-1}}(F_{n_k}),$$

其中 $n=(n_1,\cdots,n_k)$，Z_+^k 为 k 维欧氏空间中的非负整格点的集，a_n $(n\in Z_+^k)$是适当的常数.

证明 任取 X_0、$Y\in\mathfrak{g}$，适合 $|X_0|=|Y|=1$，再令 $X=uX_0$，则存在 $\varepsilon>0$，使得当 $|u|$、$|t|<\varepsilon$ 时，

$$\exp(X+tY)=\exp X\cdot\exp Z(u,t),$$

其中 $Z(u,t)$是 $\mathfrak{g}$ 中过原点的一小片二维的实解析曲面（当 X_0、Y 固定时）从面可表示成

$$Z(u,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}t^k A_k(X,Y), \tag{1.60}$$

其中 $A_k(uX_0,Y)$在 $|u|<\varepsilon$ 上为实解析的，它关于 Y 是 k 次齐次的多项式.

由(1.13)式至(1.15)式首先要计算 $\mathrm{Exp}(\widetilde{X}+t\widetilde{Y})$，有

$$\begin{aligned}\mathrm{Exp}(\widetilde{X}+t\widetilde{Y})&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(\widetilde{X}+t\widetilde{Y})^k\\&=\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\widetilde{X}^k\right)\left(I+\sum_{k=1}^{\infty}t^k\widetilde{R}_k\right)\\&=(\mathrm{Exp}\widetilde{X})\left(I+\sum_{k=1}^{\infty}t^k\widetilde{R}_k\right),\end{aligned} \tag{1.61}$$

其中

$$\widetilde{R}_k=\sum_{n\in Z_+^k}a_n\widetilde{F}_{n_k}\widetilde{F}_{n_{k-1}}\cdots\widetilde{F}_{n_1},$$

$$a_n=\frac{(1+n_1)\cdots(1+n_k)}{(1+n_1)(2+n_1+n_2)\cdots(k+n_1+\cdots+n_k)}.$$

(1.61)式中 $\widetilde{R}_k$ 的表达式可用归纳法证明. 现置 $U_a\subset G$ 是 G 的以幺元为中心、半径为 $a>\varepsilon$ 的测地球，适合 $U_\varepsilon U_\varepsilon\subset U_a$. 对任意的在 U_a 上实解析的函数 f，当 $|u|$、$|t|<\varepsilon$ 时有下式成立：

$$(\mathrm{Exp}\widetilde{X})\left(I+\sum_{k=1}^{\infty}t^k\widetilde{R}_k\right)f(e)$$
$$=(\mathrm{Exp}\widetilde{X}\cdot\mathrm{Exp}\widetilde{Z}(u,t))f(e).$$

由 f 的任意性就得到了对任意的 U_a 上实解析的 f，有

$$\left(I+\sum_{k=1}^{\infty}t^k\widetilde{R}_k\right)f(e)=(\mathrm{Exp}\widetilde{Z}(u,t))f(e)\tag{1.62}$$

成立.

将(1.62)式看作 $|u|$、$|t|<\varepsilon$ 上的实解析函数，考虑它们的解析延拓，则可得到

$$|\widetilde{R}f(e)|\leqslant\sum_{n\in Z_+^k}|F_{n_k}|\cdots|F_{n_1}|b_k$$
$$=b_k(B_2(X,Y))^k,$$

其中 b_k 是 f 在幺元处 k 阶偏导数绝对值的最大值，$B_2(X,Y)=e^{B_1}$，

$$B_1=B_1(X,Y)$$
$$=\max\{\|adX\|,\|adY\|,|X|,|Y|\},$$
$$\|adX\|^2=\mathrm{Tr}(adX\,\overline{adX}').$$

上面的估计表明了，对任意的正数 $B>1$，只要

$$|t|<\frac{1}{2}e^{-B},\quad |X|=u<B,\tag{1.63}$$

则(1.62)式左端在区域(1.63)中为实解析，从而其右端也在区域(1.63)上为实解析，由 f 的任意性，就得到了在区域(1.63)上的实解析算子的等式

$$I+\sum_{k=1}^{\infty}t^k\widetilde{R}_k=\mathrm{Exp}\widetilde{Z}(u,t).\tag{1.64}$$

因为上式在 $t\to 0$ 时是恒等算子，从而可取到足够小的正数 B_3 和区域

$$D=\{(u,t),|t|<B_3,|u|<B\},$$

其中 $B_3<\frac{1}{2}e^{-B}$，使得在区域 D 上 $\widetilde{Z}(u,t)$ 即 $Z(u,t)$ 也是实解析的.

根据在$|u|$、$|t|<\varepsilon$时

$$\exp(X+tY)=\exp X\cdot\exp Z(u,t)$$

及 exp 是实解析的，由解析延拓的唯一性就得出以上等式在区域 D 上也成立. 因为对任意的 X、$Y\in\mathfrak{g}$ 均存在正数 $B>1$，使得前面定义的

$$B_1(X,Y)<B.$$

再适当选取 B_3，就得到以上等式对这样的 X、Y 成立. 这就基本证明了引理. 剩下的就是具体算出 $A_1(X,Y),\cdots,A_k(X,Y)$.

由(1.60)、(1.61)和(1.64)式，就可得到

$$A_1(X,Y)=R_1=\frac{I-e^{-adX}}{adX}(Y)$$
$$=A(X)(Y),$$

且当 X 面定时，上式对任意的 Y 均成立. 同样可得 $A_2(X,Y)$. 对一般的 k，由(1.61)式中 R_k 的具体表达式和 Jacobi 等式就可得到 $A_k(X,Y)$必然为引理的形式. 引理证毕. ∎

引理1.2 假设同引理 1.1，则当

$$A(X)=\frac{I-e^{-adX}}{adX}$$

为非奇异时，以下公式对 $X\in\mathfrak{g}$ 和足够小的 t、s 成立：

$$\exp X\cdot\exp tY$$
$$=\exp\left(X+tA(X)^{-1}(Y)+\frac{t^2}{2}B(X,Y)(Y)+O(t^3)\right).$$

其中

$$A(X)=\frac{I-e^{-adX}}{adX},\quad B(X,Y)=A(X)^{-1}C(X,Y)A(X)^{-1},$$

$$C(X,Y)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(k+1)!}\sum_{l=0}^{k-1}(adX)^l\,ad(A(X)^{-1}(Y))(adX)^{k-l-1}.$$

证明 研究 $\exp X\cdot\exp tY\cdot\exp sY$，由引理 1，

$$\exp X\cdot\exp tY\cdot\exp sY$$
$$=\exp(X+A^{-1}(X)(tY)+O(t^2))\exp sY$$
$$=\exp(X+A^{-1}(X)(tY)$$

$$+ A^{-1}(X + A^{-1}(X)(tY))(sY) + O(t^2 + s^2)).$$

由引理 1.1,得

$$A(X + A^{-1}(X)(tY)) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)!}(\mathrm{ad}(X + A^{-1}(X)(tY))^k.$$

因为

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{ad}(X + A^{-1}(X)(tY))^k \\
&\quad = (\mathrm{ad}X)^k + \sum_{l=0}^{k-1} t(\mathrm{ad}X)^l \mathrm{ad}(A^{-1}(X)(Y))(\mathrm{ad}X)^{k-l-1} \\
&\qquad + O(t^2),
\end{aligned}$$

这就得到

$$\begin{aligned}
&A(X + A^{-1}(X)(tY)) = A(X) - tC(X,Y) + O(t^2) \\
&A^{-1}(X + A^{-1}(X)(tY)) \\
&\quad = A(X)^{-1}(I - tC(X,Y)A^{-1}(X) + O(t^2))^{-1} \\
&\quad = A(X)^{-1} + tB(X,Y) + O(t^2),
\end{aligned}$$

由此可得

$$\begin{aligned}
&\exp X \cdot \exp(t+s)Y \\
&\quad = \exp X \cdot \exp tY \cdot \exp sY \\
&\quad = \exp(X + A^{-1}(X)(tY + sY) \\
&\qquad + tsB(X,Y)(Y) + O(t^2 + s^2)).
\end{aligned}$$

另一方面,由引理 1 可得

$$\begin{aligned}
&\exp X \cdot \exp tY \\
&\quad = \exp(X + A^{-1}(X)(tY) + \frac{t^2}{2}Z_2 + O(t^3)).
\end{aligned}$$

用 $t+s$ 代替上式中的 t,经比较系数,就证明了本引理. ▮

当 $\mathfrak{g}$ 具有(1.58)式的正交直和分解时,记 $\Pi:\mathfrak{g}\to\mathfrak{p}$ 为 $\mathfrak{g}$ 到 $\mathfrak{p}$ 上的投影算子,I 为恒等算子,则有如下引理:

引理 1.3 设 $X,Y\in\mathfrak{p}$,则有下式成立:

$$\exp X \cdot \exp tY = p(t)k(t),$$

其中 $p(t)$是 P 中过 $\exp X$ 点的曲线,$k(t)$是 K 中过幺元的曲线:

$$p(t) = \exp(X + t(\Pi A(X)\Pi)^{-1}(Y) + O(t^2)),$$

$$k(t) = \exp(-t(I - \Pi)A(X)(\Pi A(X)\Pi)^{-1}(Y) + O(t^2)).$$

应用引理 1.2 具体计算 $p(t)$，即得引理 1.3.

现在可定出紧致李群和紧致齐性空间上的 Laplace—Beltrami 算子. 首先用到如下熟知的命题：

命题 1.1 设 M 是一个 Riemann 流形，Δ 是 M 的 Laplace—Beltrami 算子，$\varphi: M \to M$ 是 M 上的等度量变换，则 Δ 在 φ 之下不变. 更具体的，Δ 在 φ 之下的不变性等价于对一切 M 上的 C^∞ 函数 f，

$$(\Delta f) \circ \varphi = \Delta(f \circ \varphi) \tag{1.65}$$

恒成立.

称李群 G 是幺模的，是指对任意的 $x \in G$，有

$$|\det Adx| = 1.$$

而一个连通的幺模李群将它作为实李群，从而当伴随表示是 $\mathfrak{g}$ 上非异的实线性变换时，上式则变成

$$\det Adx = 1, \quad x \in G.$$

紧致李群、半单李群、幂零李群(包括欧氏空间)都是幺模李群.

设 G 是李群，在 G 上取定了一个左不变 Riemann 度量，$\mathfrak{g}$ 是 G 的李代数，$X_1, \cdots, X_n$ 是 $\mathfrak{g}$ 的关于左不变 Riemann 度量的标准正交基，$\tilde{X}_1, \cdots, \tilde{X}_n$ 是 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 对应的 G 上的左不变向量场.

满足上面条件的左不变向量场称为 G 上的左不变向量场的标准正交基.

每个 $X \in \mathfrak{g}$ 在基 $X_1, \cdots, X_n$ 之下有坐标表示

$$X = \sum_{k=1}^{n} x_k X_k.$$

在指数映射下，$\mathfrak{g}$ 的切割迹内部 Ω_0 是 G 的幺元的切割迹内部的测地法坐标系，并称 $X \in \Omega_0$ 的坐标，$(x_1, \cdots, x_n)$ 为 G 中点 $\exp X$ 的测地法坐标.

引理 1.4 设 G 是一个幺模李群，在 G 上取定了一个左不变 Riemann 度量，Δ 是 G 的 Laplace—Beltrami 算子，$\tilde{X}_1, \cdots, \tilde{X}_n$ 是 G

上的左不变向量场的标准正交基，则有

$$\Delta = \sum_{k=1}^{n} \tilde{X}_k^2. \tag{1.66}$$

证明 由引理 1.1，G 的左不变 Riemann 度量在标准正交基 $X_1,\cdots,X_n$ 之下，在测地法坐标系之中的矩阵是

$$(g_{ij}(\exp X)) = \left[\frac{I - e^{-adX}}{adX}\right]^T \left[\frac{I - e^{-adX}}{adX}\right],$$

式中[ ]^T 表示矩阵[ ]的转置.

由于 Laplace－Beltrami 算子可用联络表示成

$$\Delta = \sum_{i,j} g^{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_{i,j,k} g^{ij} \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k},$$

在幺元处即 $X=0$ 点计算 Γ_{ij}^k，由公式

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_r g^{kr} \left(\frac{\partial g_{rj}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{ri}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_r} \right),$$

记 $g=(g_{ij}), g^{-1}=(g^{ij})$，则得到

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \left\{ e_k g^{-1} \left(\frac{\partial g}{\partial x_i} e_j' + \frac{\partial g}{\partial x_j} e_i' - \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)' e_i g e_j' \right) \right\},$$

其中 e_k 是第 k 个单位行向量 $(k=1,2,\cdots,n)$.

这就得到在幺元处 g 与 g^{-1} 均为单位阵，

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij}^k(e) = & \frac{1}{2} \{ e_k ((adX_i)' + adX_i) e_j' \\ & + e_k ((adX_j)' + adX_j) e_i \\ & - e_i ((adX_k)' + adX_k) e_j \} \\ = & \frac{1}{2} \{ C_{ik}^j + C_{ij}^k + C_{jk} + C_{ji}^k - C_{ki}^j - C_{kj}^i \}, \end{aligned} \tag{1.67}$$

其中 $[X_i, X_j] = \sum_{k=1}^{n} C_{ij}^k X_k$ 是李代数 $\mathfrak{g}$ 的结构常数.

由此可得

$$\sum_{i=1}^{n} \Gamma_{ii}^k(e) = -2\mathrm{Tr} adX_k \quad (k = 1,2,\cdots,n).$$

当 G 幺模时，上式就等于零.

另一方面，在 G 的幺元处有

$$\Delta_e = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\bigg|_e - \sum_{k=1}^{n}\Big(\sum_{i=1}^{n}\Gamma_{ii}^k(e)\Big)\frac{\partial}{\partial x_k}\bigg|_e.$$

当 G 幺模时，就有

$$\Delta_e = \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_k^2}\bigg|_e.$$

由命题 1.1，当 G 幺模时，

$$(\Delta f)(x) = \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_k^2}f\Big(x\exp\sum_{i=1}^{n}x_iX_i\Big)\bigg|_{x=0}$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big)^2 f(x\exp tX_k)\bigg|_{t=0}.$$

由左不变向量场求导公式(1.10)又可得

$$\Big(\sum_{k=1}^{n}\tilde{X}_k^2 f\Big)(x) = \sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big)^2 f(x\exp tX_k)\bigg|_{t=0}.$$

这就说明，对 G 上的一切 C^∞ 函数 f，有

$$\Delta f = \sum_{k=1}^{n}\tilde{X}_k^2 f$$

恒成立，这就证明了引理 1.4. ▌

下面讨论紧致齐性空间 M 上的 Laplace—Beltrami 算子.

在 $\mathfrak{p}=T_o(M)$ 上取内积 $(\cdot,\cdot)$，使它等于 G 的李代数 $\mathfrak{g}$ 上的不变内积 $B(\cdot,\cdot)$ 在 $\mathfrak{p}$ 上的限制. 因为 $\mathfrak{p}$ 在 $\mathrm{Ad}K$ 之下不变，从而 $\mathfrak{p}=T_o(M)$ 上的内积 $(\cdot,\cdot)$ 在 K 的迷向表示下不变. G 中元 x 在 M 上产生的微分同胚，它的微分记为 $\mathrm{d}x$，定义 M 上的 Riemann 度量 $g(\cdot,\cdot)$ 为

$$g_m(X,Y) = (\mathrm{d}p(m)^{-1}(X),\mathrm{d}p(m)^{-1}(Y)) \qquad (1.68)$$

对一切 X、$Y\in T_m(M)$，$m\in M$，$m=p(m)\cdot o$，$p(m)\in P$ 恒成立. 则在(1.68)式定义的 Riemann 度量下，G 中元在 M 上的作用就是 M 上的等度量变换.

记 exp 为 $\mathfrak{g}$ 到 G 上的指数映射，则映射

$$X\in\mathfrak{p}\to\exp X\cdot o\in M \qquad (1.69)$$

是 $\mathfrak{p}$ 到 M 中的实解析映射. 由李群李代数的已知结果，存在正数

a,使得(1.69)式的映射限制在

$$\Omega = \{X \in \mathfrak{p}, |X| < a\} \tag{1.70}$$

上是微分同胚.

以下来证明,(1.69)就是 $\mathfrak{p}$ 到 M 上的指数映射,这只需证明下面的引理:

引理1.5 对一切 $0 \neq X \in \mathfrak{p}$,

$$\exp tX \cdot o, \quad -\infty < t < +\infty$$

是 M 在 G 不变 Riemann 度量(1.68)下的过 $o \in M$ 点的完全测地线,它在 o 点的切向量为 X.

证明 因为(1.70)式的 Ω 在(1.69)的映射下是 M 在 o 点的局部坐标系,所以 $\exp tX \cdot o$ 在 o 点的切向量就是 X.

在 $\mathfrak{p}$ 中取标准正交基 $X_1 = X/|X|, X_2, \cdots, X_n$,则每个 $Y \in \mathfrak{p}$ 有坐标表示:

$$Y = \sum_{k=1}^{n} x_k X_k,$$

它给出了 $\mathfrak{p}$ 上的整体坐标系$\{(x_1, \cdots, x_n)\}$,它的基向量场则是

$$\frac{\partial}{\partial x_k} = X_k \quad (k = 1, 2, \cdots, n).$$

将 $\mathfrak{p}$ 上的上述整体坐标系限制在 Ω 上,它就是 M 在 o 点邻域的局部坐标系.

在 Ω 上计算 Riemann 度量 $g(\cdot, \cdot)$可得

$$(g_{ij}(\exp X \cdot o)) = T(X)' T(X), \quad X \in \Omega, \tag{1.71}$$

其中根据引理 1.3,得

$$\begin{aligned} T(X) &= \Pi\left(\frac{I - e^{-\mathrm{ad}X}}{\mathrm{ad}X}\right)\Pi\Big|_{\mathfrak{p}} \\ &= \Pi_0 \frac{I - e^{-\mathrm{ad}X}}{\mathrm{ad}X} \Pi_0'. \end{aligned} \tag{1.72}$$

特别可得

$$\begin{aligned} g_{ij}(\exp Y \cdot o) &= g_{\exp Y \cdot o}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) \\ &= g_{\exp Y \cdot o}(X_i, X_j) = (Y_i, Y_j), \end{aligned}$$

其中

$$Y_k = \Pi_0 \frac{I - e^{-adY}}{adY} \Pi_0^t(X_k) \quad (k = 1,2,\cdots,n).$$

当取 $Y=tX$ 时，因为 $X_1=X/|X|$，就有

$$Y_1 = \Pi_0 \frac{I - e^{-adtX}}{adtX} \Pi_0^t(X_1) = X_1,$$

从而可得

$$\begin{aligned}
(Y_1,Y_j) &= (X_1,Y_j) = B(X_1,Y_j) \\
&= B\left(X_1, \frac{I - e^{-ad(tX)}}{ad(tX)}(X_j)\right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)!} B(X_1,(ad(tX))^k(X_j)) \\
&= \delta_{1j} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-t)^k}{(k+1)!} B(X_1,(adX)^k(X_j)) \\
&= \delta_{1j} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-t)^k}{(k+1)!} \\
&\quad \times B(adX(X_1),(adX)^{k-1}(X_j)) = \delta_{1j}.
\end{aligned} \tag{1.73}$$

此即

$$g_{1j}(\exp tX \cdot o) = \begin{cases} 1, 若 j = 1; \\ 0, 若 j \neq 1, \end{cases}$$

对 $-a/|X|<t<a/|X|$ 均成立.

M 中的曲线 $\exp tX \cdot o$ 在局部坐标系 Ω 中的曲线方程是

$$x_1 = t|X|, \quad x_2 = \cdots = x_n = 0,$$

将它代入测地线方程中，得

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2x_k}{dt^2} + \sum_{i,j=1}^{n} \Gamma_{ij}^k \frac{dx_i}{dt} \cdot \frac{dx_j}{dt} \\
&\quad = 0 + \Gamma_{11}^k |X|^2 = 0 \quad (k = 1,2,\cdots,n).
\end{aligned}$$

所以 $\exp tX \cdot o$ 在 $-a<t<a$ 时是测地线.

取 $0<a_1<a/|X|$，置 $m=\exp a_1X \cdot o$，则

$$Y \in \Omega \to \exp a_1 X \cdot \exp Y \cdot o \in M \tag{1.74}$$

给出了 m 点的局部坐标系. 而 $o \in M$ 点邻域的基向量场 X_k $(k=1,2,\cdots,n)$，在 $\mathrm{d}p(m)$ 的作用下就变成了 m 点坐标系中的基向量场 $X_1(m),\cdots,X_n(m)$，即

$$X_k(m) = \mathrm{d}p(m)(X_k) \quad (k = 1,2,\cdots,n).$$

在 m 点局部坐标系中计算 Riemann 度量 g，因为 $p(m)$ 是等度量变换，从而对任一点

$$m_1 = \exp a_1 X \cdot \exp tX, \quad |t| < a/|X|,$$

有下式成立：

$$\begin{aligned} & g_{m_1}(X_i(m),X_j(m)) \\ & \quad = g_{\exp tX \cdot o}(\mathrm{d}p(m)^{-1}(X_i(m)),\mathrm{d}p(m)^{-1}(X_j(m))) \\ & \quad = g_{\exp tX \cdot o}(X_i,X_j). \end{aligned}$$

由(1.73)式，经过在 m 点局部坐标系中计算，

$$g_{1j} = \begin{cases} 1, j = 1; \\ 0, j \neq 1, \end{cases}$$

仍然成立. 同前面一样，即得

$$\exp a_1 X \cdot \exp tX \cdot o, \quad -a/|X| < t < a/|X|$$

是过 $\exp a_1 X \cdot o$ 点的测地线. 而对 $\exp(-a_1 X) \cdot o$ 点可作同样的讨论. 因为 $\exp tX$ 是 G 的单参数子群，故可得

$$\exp tX, \quad -(a_1 + a/|X|) < t < a_1 + a/|X|$$

是 M 的过 o 点的测地线. 应用归纳法继续推证，即可证明本引理. ∎

上面的证明包含着以下引理：

引理 1.6 设 $X_1,\cdots,X_n, n=\dim M$，是 $\mathfrak{p}=T_o(M)$ 的关于 G 不变 Riemann 度量(1.67)的标准正交基，则在 M 的测地法坐标系中，G 不变 Riemann 度量(1.67)的方阵是

$$(g_{ij}(\exp X \cdot o)) = T(X)'T(X), \quad X \in \mathfrak{p},$$

其中

$$T(X) = \Pi \frac{I - \mathrm{e}^{-\mathrm{ad}X}}{\mathrm{ad}X} \Pi \Big|_{\mathfrak{p}}$$

$$= \Pi_0 \frac{I - e^{-adX}}{adX} \Pi_0^t,$$

式中 Π 是 $\mathfrak{g}$ 到 $\mathfrak{p}$ 的投影算子.

引理 1.7 设 Δ 是紧致齐性空间 M 上的由 G 不变 Riemann 度量(1.67)定义的 Laplace－Beltrami 算子，$X_1, \cdots, X_n$ 是 $\mathfrak{p} = T_o(M)$ 的标准正交基，则对 M 上的一切 C^∞ 函数 f，有

$$(\Delta f)(m)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \right)^2 f(p(m)\exp tX_i \cdot o) \Big|_{t=0}, \qquad (1.75)$$

其中 $p(m)$ 由(1.59)式定义.

证明 由引理 1.4 的证明可知，只需证明在 o 点处

$$\sum_{i=1}^{n} \Gamma_{ij}^{k}(o) = 0 \quad (k = 1, 2, \cdots, n).$$

但由(1.63)和(1.67)式及引理 1.6 经具体计算可得到

$$\Gamma_{ij}^{k}(o) = \frac{1}{2} \{ e_k \Pi_0 ((adX_i)^t + adX_i) \Pi_0^t e_j^t$$
$$+ e_k \Pi_0 ((adX_j)^t + adX_j) \Pi_0^t e_i^t$$
$$- e_i \Pi_0 ((adX_k)^t + adX_k) \Pi_0^t e_j^t \}.$$

因为 G 紧致，所以对任意的 $X \in \mathfrak{g}$，adX 在标准正交基下是反对称阵，从而 $\Gamma_{ij}^{k}(o) = 0$，这就证明了引理 1.7. ▌

§1.4 紧致李群的表示

1.4.1 有限维表示

设 G 是一个李群，V 是复(实)域上的有限维线性空间，$\mathrm{gl}(V)$ 是 V 上线性变换全体组成的矩阵李代数，$\mathrm{GL}(V)$ 是 V 上非异线性变换全体组成的矩阵李群. 若存在连续映射 ρ，有

$$\rho: G \to \mathrm{GL}(V), \quad x \in G \to \rho(x) \in \mathrm{GL}(V),$$

使得 ρ 是 G 到 $\mathrm{GL}(V)$ 中的群同态，即对任意两个 x、$y \in G$，均有

$$\rho(xy) = \rho(x)\rho(y),$$

就称(ρ, V)为李群 G 的一个有限维复(实)表示，V 称为表示 ρ 的

表示空间，V 的复(实)维数称为表示 ρ 的维数.

下面只考虑复表示，即 V 为有限维复线性空间的情形. 首先介绍几个基本概念如下：

(1) 不变子空间：设(ρ,V)是李群 G 的表示，$W\subset V$ 是 V 的线性子空间，若对一切的 $x\in G$ 均有

$$\rho(x)(W)\subset W,$$

就称 W 为表示(ρ,V)的一个不变子空间. 若 W 是(ρ,V)的不变子空间，则 W 在 V 中的复化 $W^{\mathrm{C}}=W+\mathrm{i}W$ 也是(ρ,V)的不变子空间，所以对于复表示(ρ,V)只需考虑它的复的不变于空间. 以后讨论复表示的不变子空间，均指它是复不变子空间.

若 W 是表示(ρ,V)的不变子空间，则限制在 W 上(ρ,W)也是 G 的一个表示，例如将 V 中的向量记为坐标列向量$\begin{pmatrix} w \\ y \end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix} w \\ 0 \end{pmatrix}$的全体张成的 V 的线性子空间 W，$\rho(x)$，$x\in G$ 为

$$\rho(x)\doteq\begin{bmatrix} A(x) & B(x) \\ 0 & D(x) \end{bmatrix},$$

其中 $A(x)\in\mathrm{GL}(W)$，则表示(ρ,W)就是

$$\rho(x)=A(x).$$

(2) 恒等表示：若对一切的 $x\in G$，均有 $\rho(x)=I$，这里 I 是 V 上的恒等变换，就称(ρ,V)为**恒等表示**.

(3) 不可约表示：若李群 G 的表示(ρ,V)不含有非平凡的不变子空间，即它的不变子空间只有 V 自身和零空间$\{0\}$，就称(ρ,V)为 G 的**不可约表示**.

(4) 可约表示：若李群 G 的表示(ρ,V)含有非平凡的不变子空间，就称(ρ,V)为 G 的**可约表示**.

(5) 完全可约表示：设(ρ,V)是李群 G 的一个表示，若对 V 中每一个不变子空间 W，必存在与之相补的不变子空间 N，使得 $V=W\oplus N$，就称表示(ρ,V)是**完全可约的**.

(6) 等价表示：设(ρ_1,V_1)与(ρ_2,V_2)是李群 G 的两个表示，若存在线性同构 $A:V_1\to V_2$，使得 $A\rho_1=\rho_2A$，即对任意的 $x\in G$，均有

$$A\rho_1(x) = \rho_2(x)A,$$

就称G的表示(ρ_1,V_1)与(ρ_2,V_2)是等价的.

(7) 酉表示:若(ρ,V)是李群G的表示,在V上给定了一个Hermite内积,若对任意的$x\in G$,$\rho(x)$都是V上的酉算子,即在V的任何一组标准正交基下,$\rho(x)$均表示成一个酉方阵,就称(ρ,V)是G的一个*酉表示*.

命题1.2　酉表示若可约,必然完全可约.

证明　设(ρ,V)是G的酉表示,$(\cdot,\cdot)$是V上的Hermitian内积,若W_1是ρ的一个不变子空间,取W_2为W_1在V中的正交补,即

$$V = W_1 \oplus W_2,$$

且若$x\in W_1$,$y\in W_2$,则必有$(x,y)=0$.

对任一个$y\in W_2$和$g\in G$,由于ρ是酉表示,对任一$x\in W_1$就有

$$\begin{aligned}(x,\rho(g)y) &= (\rho(g^{-1})x,\rho(g^{-1})\rho(g)y) \\ &= (\rho(g^{-1})x,y) = 0.\end{aligned}$$

从而$\rho(g)y\in W_2$对任意的$y\in W_2$和$g\in G$均成立,即W_2也是ρ的不变子空间,所以(ρ,V)完全可约.　∎

(8) 表示的直和:设(ρ_1,V_1)和(ρ_2,V_2)是李群G的两个表示,令

$$V = V_1 \oplus V_2,\ \rho = \rho_1 \oplus \rho_2,$$

即对$w\in V$,$w=(w_1,w_2)$,其中$w_1\in V_1$,$w_2\in V_2$,酉表示(ρ,V)定义为:对一切的$x\in G$,有

$$\rho(x)(w) = (\rho_1(x)(w_1),\rho_2(x)(w_2)),$$

则称(ρ,V)为表示(ρ_1,V_1)和(ρ_2,V_2)的*直和*.

若在V_1的基$(f_1,\cdots,f_m)$之下,$\rho_1(x)$是$m\times m$方阵;在V_2的基$(g_1,\cdots,g_s)$之下,$\rho_2(x)$是$s\times s$的方阵,则在V的基$(f_1,\cdots,f_m,g_1,\cdots,g_s)$之下,$\rho(x)$是$(m+s)\times(m+s)$的准对角阵

$$\rho(x) = \begin{bmatrix}\rho_1(x) & 0 \\ 0 & \rho_2(x)\end{bmatrix}.$$

类似地可建立多个表示的直和.

(9) 张量表示：设(ρ_1,V_1)和(ρ_2,V_2)是李群G的两个表示，令

$$V=V_1\otimes V_2,\quad \rho=\rho_1\otimes\rho_2,$$

其中若$(f_1,\cdots,f_m)$、$(g_1,\cdots,g_s)$分别是V_1和V_2的基，则V的基是：

$$f_i\otimes g_j,\quad 1\leqslant i\leqslant m,\quad 1\leqslant j\leqslant s.$$

对

$$w_1\in V_1,\quad w_1=\sum_{k=1}^{m}a_kf_k;$$

$$w_2\in V_2,\quad w_2=\sum_{l=1}^{s}b_lg_l,$$

则有

$$w=w_1\otimes w_2=\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{s}a_kb_lf_k\otimes g_l.$$

表示(ρ,V)则定义为：对V中形如$w=w_1\otimes w_2$的向量，对一切的$x\in G$，恒有

$$\begin{aligned}\rho(x)w&=\rho(x)w_1\otimes w_2\\&=(\rho_1(x)w_1)\otimes(\rho_2(x)w_2).\end{aligned}$$

当在V_1的基$f_1,\cdots,f_m$之下，$\rho_1(x)$是$m\times m$方阵；在V_2的基$g_1,\cdots,g_s$之下，$\rho_2(x)$是$s\times s$方阵，且记

$$\rho_2(x)=[a_{ij}(x)]_{1\leqslant i,j\leqslant s},$$

则在V的基$f_1\otimes g_1,f_2\otimes g_1,\cdots,f_m\otimes g_1,f_1\otimes g_2,\cdots,f_m\otimes g_s$顺序之下，

$$\rho(x)=\rho_1(x)\otimes\rho_2(x)=[\rho_1(x)a_{ij}(x)]_{1\leqslant i,j\leqslant s}$$

是$s\times s$块的分块矩阵，其中每一块都是$m\times m$方阵.

上面定义的表示(ρ,V)称为表示(ρ_1,V_1)和(ρ_2,V_2)的张量表示. 类似地，定义多个表示的张量表示.

(10) 表示的特征：设(ρ,V)是李群G的有限维表示，$\rho(x)$的迹$\chi(x)=\mathrm{Tr}\rho(x)$，$x\in G$，定义了$G$上的一个函数，称为李群$G$的表示$\rho$的特征.

(11) 李代数的表示：设$\mathfrak{g}$是一个李代数，线性映射ρ

$$\rho: \mathfrak{g} \to \mathrm{gl}(V),\ X \in \mathfrak{g} \to \rho(X) \in \mathrm{gl}(V)$$

若是 $\mathfrak{g}$ 到 $\mathrm{gl}(V)$ 中的李代数的同态，即对一切的 X、$Y \in \mathfrak{g}$ 恒有

$$\rho([X,Y]) = [\rho(X), \rho(Y)]$$

成立，就称 ρ 为李代数 $\mathfrak{g}$ 的一个表示，记为 (ρ, V)，其中 V 称为表示 ρ 的表示空间，V 的维数称为表示 ρ 的维数.

在上面(1)到(9)这九个定义中，将李群换成李代数，就变成了李代数表示的对应的定义. 但对于酉表示，则要将 $\rho(x)$ 换成反Hermite阵，对张量表示，相应的公式要变成：

$$\begin{aligned}&\rho(X)w_1 \otimes w_2 \\ &\quad = (\rho_1(X)w_1) \otimes w_2 + w_1 \otimes \rho_2(X)w_2.\end{aligned}$$

这由下一小节中李群表示与李代数表示的微分关系可以得到.

1.4.2　李群的表示与李代数的表示

设 G 为李群，$\mathfrak{g}$ 是 G 的李代数，(ρ, V) 是 G 的有限维表示，令

$$\mathrm{d}\rho(X) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\rho(\exp tX)\bigg|_{t=0}, \tag{1.76}$$

则 $(\mathrm{d}\rho, V)$ 就是 $\mathfrak{g}$ 的一个表示.

要证明 $(\mathrm{d}\rho, V)$ 是李代数 $\mathfrak{g}$ 的表示，首先要证明

$$\mathrm{d}\rho: \mathfrak{g} \to g(V),\ X \in \mathfrak{g} \to \mathrm{d}\rho(X) \in \mathrm{gl}(V)$$

是线性映射. 由指数映射的公式

$$\begin{aligned}&\exp(taX)\exp(tbY) \\ &\quad = \exp(t(aX + bY) + O(t^2))\end{aligned}$$

可以得到

$$\begin{aligned}&\mathrm{d}\rho(aX + bY) \\ &\quad = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\rho(\exp(t(aX + bY)))\bigg|_{t=0} \\ &\quad = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\rho(\exp taX \exp tbY)\bigg|_{t=0} \\ &\quad = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\rho(\exp taX)\bigg|_{t=0} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\rho(\exp tbY)\bigg|_{t=0} \\ &\quad = a\mathrm{d}\rho(X) + b\mathrm{d}\rho(Y).\end{aligned}$$

这就证明了 $\mathrm{d}\rho$ 是线性映射.

因为$\exp tX$是G的单参数子群，则$\rho(\exp tX)$或者恒等于单位矩阵，即$d\rho(X)=0$，或者$\rho(\exp tX)$也是$GL(V)$的单参数子群，它在幺元处的切向量由(1.76)式为$d\rho(X)$，根据(1.9)式即得

$$\rho(\exp tX) = \operatorname{Exp} t d\rho(X). \tag{1.77}$$

由指数映射的下面公式：

$$\begin{aligned}&\exp(-tX)\exp(-tY)\exp tX\exp tY\\&\quad=\exp\{t^2[X,Y]+O(t^3)\}\end{aligned} \tag{1.78}$$

取$u=t^2$，可得

$$\begin{aligned}&d\rho[X,Y]\\&\quad=\frac{d}{du}\rho(\exp u[X,Y])\Big|_{u=0}\\&\quad=\frac{d}{du}\rho(\exp(u[X,Y]+O(u^{3/2})))\Big|_{u=0}\\&\quad=\frac{d}{du}\rho(\exp(t^2[X,Y]+O(t^3)))\Big|_{u=0}\\&\quad=\frac{d}{du}\rho(\exp(-tX)\exp(-tY)\exp tX\exp tY)\Big|_{u=0}\end{aligned}$$

将上式最后一个等式右端先由表示性质再用(1.77)式，变成矩阵形式，再用矩阵形式的(1.78)，得到

$$\begin{aligned}&d\rho([X,Y])\\&\quad=\frac{d}{du}\operatorname{Exp}(u[d\rho(X),d\rho(Y)]+O(u^{3/2}))\Big|_{u=0}\\&\quad=[d\rho(X),d\rho(Y)],\end{aligned}$$

这就证明了$(d\rho,V)$是$\mathfrak{g}$的表示.

反之，若$(d\rho,V)$是李代数$\mathfrak{g}$的有限维表示，G是以$\mathfrak{g}$为李代数的单连通李群，$\exp:\mathfrak{g}\to G$是指数映射，令

$$\rho(\exp X) = \operatorname{Exp} d\rho(X),$$

则(ρ,V)就是李群G在V上的表示.

命题1.3 设G为李群，$\mathfrak{g}$是G的李代数，(ρ,V)是G的表示，$(d\rho,V)$是ρ的微分(1.76)给出的李代数$\mathfrak{g}$的表示，则(ρ,V)不可

约的充分必要条件是$(\mathrm{d}\rho,V)$不可约.

证明 若M是表示(ρ,V)的不变子空间,由(1.76)式,即得到M是$(\mathrm{d}\rho,V)$的不变子空间.而若M是$(\mathrm{d}\rho,V)$的不变子空间,由于(1.77)式成立,所以M是(ρ,V)的不变子空间. ▍

命题 1.4 若$\mathfrak{g}$为复李代数,$\mathfrak{g}_0$是$\mathfrak{g}$的一个实形.若(ρ,V)是$\mathfrak{g}_0$的一个有限维复表示,则(ρ,V)可自然地扩充为$\mathfrak{g}$的表示如下:

$$\rho(X+\mathrm{i}Y)=\rho(X)+\mathrm{i}\rho(Y),\ X、Y\in\mathfrak{g}_0.$$

反之,若(ρ,V)是$\mathfrak{g}$的表示,则限制在$\mathfrak{g}_0$上,它就给出了$\mathfrak{g}_0$的一个表示.

证明 因为ρ是$\mathfrak{g}_0$到$\mathrm{gl}(V)$的实线性映射,所以$\rho(X+\mathrm{i}Y)$自然可将它扩充为$\mathfrak{g}$到$\mathrm{gl}(V)$的复线性映射.又因为$\mathfrak{g}$的换位运算就是$\mathfrak{g}_0$的换位运算的复扩充,所以对于$A、B\in\mathfrak{g}$,$A=X_1+\mathrm{i}Y_1$,$B=X_2+\mathrm{i}Y_2$,$X_1、Y_1、X_2、Y_2\in\mathfrak{g}_0$,容易验证

$$\rho([A,B])=[\rho(A),\rho(B)]$$

也成立.即$\mathfrak{g}_0$的表示自然地扩充为$\mathfrak{g}$的表示.

反之,因为$\mathfrak{g}_0$是$\mathfrak{g}$的实形,ρ在$\mathfrak{g}_0$上的限制自然是线性映射,又因为$\mathfrak{g}$的换位运算在$\mathfrak{g}_0$中为封闭的,故而$\rho(\mathfrak{g}_0)$关于矩阵的方括号运算必然也是封闭的. 从而限制在$\mathfrak{g}_0$上,(ρ,V)是$\mathfrak{g}_0$的表示. ▍

1.4.3 Schur 引理

在李群的表示理论中,Schur 引理起着重要的作用,下面给出的是群表示的 Schur 引理,通过对李群表示的微分,就可得到李代数表示的 Schur 引理.

命题 1.5 设(ρ_1,V_1)和(ρ_2,V_2)是群G的两个不可约表示,$A:V_1\to V_2$是线性映射,若对任意的$x\in G$,有

$$A\rho_1(x)=\rho_2(x)A$$

恒成立,则或者$A:V_1\to V_2$是线性同构,从而ρ_1与ρ_2是等价的表示,或者$A=0$.

证明 令W是A的象集,即

$$W=AV_1\subset V_2,$$

则有

$$\rho_2(x)W = \rho_2(x)AV_1$$
$$= A\rho_1(x)V_1 \subset AV_1 = W$$

对一切 $x\in G$ 成立,即 W 是 ρ_2 的不变子空间. 因为 ρ_2 不可约,所以或者 $W=\{0\}$即 $A=0$,或者 $W=V_2$,即 $AV_1=V_2$.

当 $AV_1=V_2$ 时,设映射 A 的核是 M,即

$$M = \{X \in V_1, AX = 0\},$$

则可得

$$A\rho_1(x)M = \rho_2(x)AM = 0,$$

即对一切 $x\in G$,有

$$\rho_1(x)M \subset M,$$

所以 M 是 ρ_1 的不变子空间. 但是 ρ_1 也是不可约的. 所以 M 只可能为两种情形:(a)$M=\{0\}$或(b)$M=V_1$. 当 $M=\{0\}$时,因为 $AV_1=V_2$,所以 A 是 V_1 到 V_2 上的线性同构,即(ρ_1,V_1)与(ρ_2,V_2)是等价表示. 如果 $M=V_1$,则因为 $AV_1=0$ 和 $AV_2=V_2$ 不可能同时成立,从而在 $AV_1=V_2$ 前提下,不存在 $M=V_1$ 的情形. 于是证明了命题. ▌

命题 1.6 若(ρ,V)是群 G 的不可约复表示,$B:V\to V$ 是线性映射,且 B 与 ρ 可交换,即对任意的 $x\in G$,有

$$B\rho(x) = \rho(x)B$$

恒成立,则 B 必为 V 上恒等算子 I 的数量倍,即存在复数 a,使得 $B=aI$.

证明 因 ρ 是复表示,则 B 在 V 上至少有一个特征值 a,设

$$A = B - aI,$$

则显然 A 与 ρ 可交换,因为 A 的行列式必为零,所以 A 不可能是 V 上的同构. 将命题 1.5 用于 $\rho_1=\rho_2, V_1=V_2$ 的情况,即得到 $A=0$,也就是

$$B = aI. \quad ▌$$

由上面的两个 Schur 的引理,可得如下的推论:

命题 1.7 交换群的不可约复表示必为一维的表示,其表示

空间是复一维的线性空间.

证明 设(ρ,V)是交换群G的不可约表示.任意取定一个$y_0\in G$,对任意的$x\in G$由于G可交换,使下式恒成立:

$$\rho(y_0)\rho(x)=\rho(x)\rho(y_0),$$

由命题1.6得

$$\rho(y_0)=\lambda(y_0)I$$

对任意的$y_0\in G$恒成立,因此,若V的复维数大于1,则与(ρ,V)不可约相矛盾,由于这时V的任意一个复一维的线性子空间均为ρ的非平凡的不变子空间,从而V必为复一维的线性空间. ▌

1.4.4 紧致李群的不可约酉表示

命题1.8 紧致李群的连续表示必等价于一个酉表示.

证明 设(ρ,V)是紧致李群G的一个连续表示,$(\cdot,\cdot)$是V上的一个Hermite内积,对任意的X、$Y\in V$,令

$$\langle X,Y\rangle=\int_G(\rho(x)X,\rho(x)Y)\mathrm{d}x,$$

由于$\rho(x)$是G的连续表示,所以算子范数$\|\rho(x)\|$必为G上的连续函数,因此,对任意的X、$Y\in V$,上面的积分式恒有意义.容易验证$\langle\cdot,\cdot\rangle$也是$V$上的一个Hermite内积,且对于任意的$y\in G$,有

$$\begin{aligned}&\langle\rho(y)X,\rho(y)Y\rangle\\&=\int_G(\rho(x)\rho(y)X,\rho(x)\rho(y)Y)\mathrm{d}x\\&=\int_G(\rho(xy)X,\rho(xy)Y)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

取$\mathrm{d}x$为G上的Haar测度,则有$\mathrm{d}(xy)=\mathrm{d}x$,由此可得

$$\begin{aligned}\langle\rho(y)X,\rho(y)Y\rangle&=\int_G(\rho(x)X,\rho(x)Y)\mathrm{d}x\\&=\langle X,Y\rangle\end{aligned}$$

对任意的X、$Y\in\mathfrak{g}$和$y\in G$均成立,所以$\rho(y)$是V上关于Hermite内积$\langle\cdot,\cdot\rangle$的酉算子,对一切$y\in G$均成立.这即说明了$(\rho,V)$等价于一个酉表示. ▌

由命题 1.8 和命题 1.2，即可得到以下命题：

命题 1.9 紧致李群的任意一个连续表示都是完全可约的.

设(ρ,V)是紧致李群 G 的一个酉表示，则任意取定 V 的一组标准正交基，就可得到 G 到酉群 U_n 中的一个矩阵表示 ρ：

$$\rho: G \to U_n,\quad x \to \rho(x) \in U_n, \tag{1.78'}$$

其中 n 是 V 的复维数. 显然，若在 V 的一组标准正交基下得到 G 的一个矩阵表示 $\rho(x)$，而在 V 的另一组标准正交基下所得到的矩阵表示就是原来的矩阵表示 $\rho(x)$通过一个 $A\in U_n$ 的相似而得到的，即在新基之下，表示矩阵是：

$$\rho_1(x) = A\rho(x)A^{-1},\quad A \in U_n. \tag{1.79}$$

而当表示(ρ_1,V_1)是与表示(ρ,V)等价的酉表示时，在 V_1 中任意取定一组标准正交基后，得到的矩阵表示也必然为(1.79)的形式. 在下面的讨论中，我们称 ρ 是 G 的一个 n 维酉表示，乃是指(1.78′)式定义的矩阵表示. 而 ρ_1 与 ρ 等价是指(1.79)式成立. 而称 ρ 不可约，乃是指作用于复 n 维线性空间 V 上时，$\rho(G)$是不可约的.

在下面的讨论中，在紧致李群 G 上总是取规格化的 Haar 测度 $\mathrm{d}x$，即 G 的体积为

$$\int_G \mathrm{d}x = 1.$$

命题 1.10 设 ρ_1 和 ρ_2 是紧致李群 G 的两个不等价的有限维不可约酉表示，其表示维数分别是 n_1 和 n_2. 记

$$\rho_1(x) = (t_{ij}(x)),\quad \rho_2(x) = (u_{kl}(x)),$$

其中$(t_{ij}(x))$和$(u_{kl}(x))$分别是 $n_1\times n_1$ 和 $n_2\times n_2$ 的酉方阵，则

$$\int_G t_{ij}(x)\,\overline{u_{kl}(x)}\mathrm{d}x = 0$$

对任意的 $1\leqslant i,\ j\leqslant n_1$ 和 $1\leqslant k,\ l\leqslant n_2$ 恒成立.

证明 设 $B=(b_{kl})$是一个 $n_1\times n_2$ 的矩阵，令

$$A = \int_G \rho_1(x)B\rho_2(x^{-1})\mathrm{d}x,$$

由于 ρ_2 是酉表示，所以有

$$\rho_2(x^{-1}) = \rho_2(x)^{-1} = \overline{\rho_2(x)}^t,$$

从而得到

$$\rho_1(x)B\rho_2(x^{-1}) = \left(\sum_{k=1}^{n_1}\sum_{s=1}^{n_2} b_{ks}t_{ik}(x)\overline{u_{js}(x)}\right),$$

当取 $B=E_{rp}$ 即第 r 行 p 列元素为1，其余元素为零的 $n_1\times n_2$ 矩阵时，就得到

$$\rho_1(x)E_{rp}\rho_2(x^{-1}) = (t_{ir}(x)\overline{u_{jp}(x)}).$$

对 $y\in G$，有

$$\begin{aligned}\rho_1(y)A &= \int_G \rho_1(y)\rho_1(x)B\rho_2(x^{-1})\mathrm{d}x \\ &= \int_G \rho_1(yx)B\rho_2(x^{-1})\mathrm{d}x \\ &= \int_G \rho_1(x)B\rho_2((y^{-1}x)^{-1})\mathrm{d}x \\ &= \int_G \rho_1(x)B\rho_2(x^{-1})\mathrm{d}x\rho_2(y) = A\rho_2(y)\end{aligned}$$

对一切 $y\in G$ 成立. 因为 ρ_1 与 ρ_2 不等价，由 Schur 引理，对一切 $B=(b_{kl})$，均有 $A=0$ 成立，特别有

$$\begin{aligned}0 &= \int_G \rho_1(x)E_{rp}\rho_2(x^{-1})\mathrm{d}x \\ &= \int_G \left(t_{ir}(x)\overline{u_{jp}(x)}\right)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

对任意的 $1\leqslant r\leqslant n_1$，$1\leqslant p\leqslant n_2$ 成立. 此即

$$\int_G t_{ij}(x)\overline{u_{kl}(x)}\mathrm{d}x = 0$$

对 $1\leqslant i,j\leqslant n_1$，$1\leqslant k,l\leqslant n_2$ 均成立. ▌

命题1.11 设 ρ 是紧致李群 G 的不可约酉表示，ρ 的维数是 n，又设

$$\rho(x) = (t_{ij}(x))_{1\leqslant i,j\leqslant n},$$

则对 G 上规格化 Haar 测度 $\mathrm{d}x$，有

$$\int_G |t_{ij}(x)|^2\mathrm{d}x = \frac{1}{n} \quad (1\leqslant i,j\leqslant n),$$

及当$(i,j)\neq(k,l)$且$1\leqslant i,j,k,l\leqslant n$时，有

$$\int_G t_{ij}(x)\,\overline{t_{kl}(x)}\mathrm{d}x = 0.$$

证明 研究积分

$$A = \int_G \rho(x) B \rho(x^{-1})\mathrm{d}x,$$

则同命题 1.10 中的证明一样，可得

$$\rho(y)A = A\rho(y)$$

对一切$y\in G$和任意的$n\times n$方阵B成立. 由 Schur 引理，存在复数a，使得

$$A = aI.$$

另一方面，设E_{rs}是第r行第s列的元素为 1、其余元素为 0 的$n\times n$方阵，当$B=E_{rs}$时，有

$$\rho(x)E_{rs}\rho(x^{-1}) = (t_{ir}(x)\,\overline{t_{js}(x)}).$$

对关于A的积分求矩阵的迹，由于$\mathrm{d}x$规格化，可得

$$\mathrm{Tr}A = \mathrm{Tr}B,$$

特别取$B=E_{rs}$且$r\neq s$时，就有$\mathrm{Tr}A=0$，即得到

$$0 = \int_G (t_{ir}(x)\,\overline{t_{js}(x)})\mathrm{d}x,\ r\neq s,$$

也即当$1\leqslant i,r,j,s\leqslant n$，且$r\neq s$时，下式成立：

$$\int_G t_{ir}(x)\,\overline{t_{js}(x)}\mathrm{d}x = 0.$$

当$B=E_{rr}$时，得到

$$an = \mathrm{Tr}A = \mathrm{Tr}E_{rr} = 1, \text{即 } a = \frac{1}{n},$$

从而得到

$$\frac{1}{n}I = \int_G \left(t_{ir}(x)\,\overline{t_{jr}(x)}\right)\mathrm{d}x,$$

由此即得，当$1\leqslant i,r,j\leqslant n$且$i\neq j$时，有

$$\int_G t_{ir}(x)\,\overline{t_{jr}(x)}\mathrm{d}x = 0;$$

当 $1\leqslant i,r\leqslant n$ 时,有

$$\int_G |t_{ir}(x)|^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{n}.$$

从而证明了命题. ▍

由命题1.9、1.10和1.11可得以下命题:

命题1.12 设 ρ 是紧致李群 G 的有限维酉表示,$\chi(x)=\mathrm{Tr}\rho(x)$是表示 ρ 的特征,则 ρ 不可约的充分必要条件是,对 G 上规格化的 Haar 测度,有

$$\int_G |\chi(x)|^2 \mathrm{d}x = 1.$$

证明 若 ρ 不可约,由命题1.11即得

$$\int_G |\chi(x)|^2 \mathrm{d}x = 1.$$

若 ρ 可约,则由命题1.9,它可分解成有限个不可约表示的直和,设为

$$\rho = \rho_1 \oplus \rho_2 \oplus \cdots \oplus \rho_s, \quad s \geqslant 2.$$

设

$$\chi_s(x) = \mathrm{Tr}\rho_s(x),$$

则由表示直和的定义,得

$$\chi(x) = \mathrm{Tr}\rho(x) = \sum_{k=1}^{s} \chi_s(x).$$

由下面的命题1.13,等价表示的特征相等,从而由命题1.10和1.11即得

$$\int_G |\chi(x)|^2 \mathrm{d}x \geqslant \sum_{k=1}^{s} \int_G |\chi_s(x)|^2 \mathrm{d}x = s \geqslant 2.$$

这就证明了命题. ▍

命题1.13 设 ρ_1 和 ρ_2 是紧致李群 G 的两个有限维的等价表示,则它们的特征相等,即

$$\mathrm{Tr}\rho_1(x) = \mathrm{Tr}\rho_2(x)$$

对一切 $x\in G$ 成立.

证明 因为 ρ_1 与 ρ_2 等价,故存在非异线性映射 A,使对一切

$x\in G$,以下等式

$$\rho_1(x)=A\rho_2(x)A^{-1}$$

恒成立. 对上式两端求迹,就证明了命题. ∎

1.4.5 有限维酉表示及其特征

设(ρ,V)是紧致李群 G 的一个有限维酉表示,T 是 G 的一个 Cartan 子群. 限制在 T 上,$\rho(T)$是 T 的有限维酉表示,由命题 1.7 和命题 1.9,存在 V 的一组标准正交基,在这组基下,$\rho(T)$表示为对角阵,即

$$\begin{aligned}\rho(t)&=\rho(\exp H)\\&=\operatorname{diag}(e^{i\omega_1(H)},e^{i\omega_2(H)},\cdots,e^{i\omega_n(H)}),\end{aligned}\qquad(1.80)$$

对一切 $t\in T$ 成立,其中 n 是 V 的复维数.

(1.80)式中的 $\omega_1,\cdots,\omega_n$ 称为表示 ρ 的权,其中可能有相等的,设 $\mu_1,\cdots,\mu_s$ 是 $\omega_1,\cdots,\omega_n$ 中互不相等的权的集合,则 V 可分为权子空间的直和

$$V=V_{\mu_1}\oplus V_{\mu_2}\oplus\cdots\oplus V_{\mu_s},\qquad(1.81)$$

其中 V_{μ_k}是 $\rho(T)$的特征值为 $e^{i\mu_k(H)}$的特征向量全体张成的 V 的复线性子空间,记 V_{μ_k}的复维数为 m_k,称 m_k 为权 μ_k 的重数.

现对(1.80)式求迹,就得到了 ρ 的特征

$$\begin{aligned}\chi(t)&=\operatorname{Tr}\rho(t)=\operatorname{Tr}(\rho(\exp H))\\&=\sum_{k=1}^{n}e^{i\omega_k(H)}=\sum_{k=1}^{s}m_k e^{i\mu_k(H)}.\end{aligned}\qquad(1.82)$$

由§1.4 中的(1.76)式、命题 1.3 和命题 1.4,对表示 ρ 求导,就得到了 G 的李代数 $\mathfrak{g}$ 的表示,和 $\mathfrak{g}$ 的复化 $\mathfrak{g}^C$ 的表示. 用(1.51)式给出的 $\mathfrak{g}$ 和 $\mathfrak{g}^C$ 的 Weyl 基,$(d\rho,V)$就可明确地通过求导而写出来. 为了叙述方便,将表示 ρ 的权 ω_k 取为 $i\mathfrak{h}$ 上的实线性函数,对 $H\in i\mathfrak{h}$,就有 $iH\in\mathfrak{h}$,而 $\omega_k(iH)$就等于 $i\omega_k(H)$,即是(1.80)式中指数函数的纯虚指数,这样,设 V_ω 是(1.81)式中的某个权子空间 V_{μ_k},v_ω 是 V_ω 中的一个非零向量,就可得到

$$d\rho(H)v_\omega=\omega(H)v_\omega,\quad H\in\mathfrak{h}^C,\qquad(1.83)$$

若 $d\rho(E_\alpha)v_\omega\neq0$,$\alpha\in\Sigma$,则有

$$\mathrm{d}\rho(H)(\mathrm{d}\rho(E_\alpha)v_\omega)$$
$$= (\omega + \alpha)(H)\mathrm{d}\rho(E_\alpha)v_\omega, \tag{1.84}$$

这表明了，若 $\mathrm{d}\rho(E_\alpha)v_\omega \neq 0$，则 $\omega+\alpha$ 必是表示 ρ 及 $\mathrm{d}\rho$ 的权，而 $\mathrm{d}\rho(E_\alpha)v_\omega$就是相应的非零权向量.

(1.84)式用表示的性质和 Weyl 基的性质经计算即可得到，现计算如下：

$$\begin{aligned}
&\mathrm{d}\rho(H)\mathrm{d}\rho(E_\alpha)v_\omega \\
&= (\mathrm{d}\rho(H)\mathrm{d}\rho(E_\alpha) - \mathrm{d}\rho(E_\alpha)\mathrm{d}\rho(H))v_\omega \\
&\quad + \mathrm{d}\rho(E_\alpha)\mathrm{d}\rho(H)v_\omega \\
&= \mathrm{d}\rho([H, E_\alpha])v_\omega + \omega(H)\mathrm{d}\rho(E_\alpha)v_\omega \\
&= \alpha(H)\mathrm{d}\rho(E_\alpha)v_\omega + \omega(H)\mathrm{d}\rho(E_\alpha)v_\omega \\
&= (\omega + \alpha)(H)\mathrm{d}\rho(E_\alpha)v_\omega.
\end{aligned} \tag{1.85}$$

现在设 ω_0 是 ρ 的所有权 $\mu_1,\cdots,\mu_s$ 中序数最大的权，称为表示 ρ 的最高权，v_{ω_0}是非零的最高权向量，则对任意的 $\alpha\in\Sigma_+$，$\omega_0+\alpha$ 都不是表示 ρ 的权，由(1.84)式即得到

$$\mathrm{d}\rho(E_\alpha)v_{\omega_0} = 0,\ \alpha \in \Sigma_+. \tag{1.86}$$

由特征的定义和(1.82)式，可得到连通紧致李群 G 的有限维酉表示(ρ,V)及其特征如下的性质：

(1) 特征是 G 上的中心函数，且限制在 G 的 Cartan 子群 T 上，特征是 Weyl 群对称的三角多项式.

设 f 是 G 上的连续函数，且对一切 x、$y\in G$，有

$$f(xyx^{-1}) = f(y) \tag{1.87}$$

恒成立，则 f 称为 G 上的中心函数. 由 G 上点的共轭性质，f 的值由它在 G 的一个 Cartan 子群 T 上的值完全确定. T 上点的共轭关系由 Weyl 群决定，因此 f 在 T 上是 Weyl 群对称的，即

$$f(\sigma(t)) = f(t),\ \sigma \in W \tag{1.88}$$

对一切 $\sigma\in W$ 和 $t\in T$ 成立.

由特征的定义，表示的性质和迹的性质，即得到特征是中心函数. 而由(1.82)和(1.88)式即得到特征是 Weyl 群不变的三角多

项式.

(2) 若 ω 是表示(ρ,V)的权,则对一切的 $\sigma\in W$,$\sigma(\omega)$都是表示 ρ 的权.

由 Weyl 群的定义和它的性质,用 $\mathfrak{g}$ 的 Weyl 基(1.51)式作适当的计算,可以证明 G 的 Weyl 群的元均是由 G 中适当的元产生的 G 上的内自同构,它的微分就是 AdG 中的一个有限子群.

同在复半单李代数的根系性质(2)中所作的一样,可用(1.47)式定义的 $\mathfrak{g}$ 上的 G 不变内积 $B(\cdot,\cdot)$将 $\mathfrak{h}$ 上的实线性函数空间 $\mathfrak{h}^*$ 嵌入 $\mathfrak{h}$,这一嵌入 $\mu\in\mathfrak{h}^*\to H_\mu\in\mathfrak{h}$,定义为对一切 $H\in\mathfrak{h}$ 有

$$\mu(H)=B(H_\mu,H) \tag{1.89}$$

恒成立,由此可定义 $\mathfrak{h}^*$ 上的内积

$$B(\lambda,\mu)=B(H_\lambda,H_\mu)$$

及定义 Weyl 群在 $\mathfrak{h}^*$ 上的作用

$$\sigma(\mu)(H)\equiv B(\sigma(H_\mu),H),\ \forall\ H\in\mathfrak{h}.$$

Weyl 群在 T、$\mathfrak{h}$ 和 $\mathfrak{h}^*$ 上作用的相互关系是

$$\begin{aligned}\sigma(t)&=\sigma(\exp H)=\exp\sigma(H),\\ \mu(\sigma(H))&=\sigma^{-1}(\mu)(H).\end{aligned} \tag{1.90}$$

因此由(1.82)、(1.88)和(1.90)式可得

$$\sum_{k=1}^{s}m_k e^{i\mu_k(H)}=\sum_{k=1}^{s}m_k e^{i\sigma(\mu_k)(H)}$$

对每个 $\sigma\in W$ 和一切 $H\in\mathfrak{h}$ 均成立. 因为上式中的 $\mu_k(k=1,2,\cdots,s)$互不相等,从而 $e^{i\mu_k(H)}(k=1,2,\cdots,s)$是 $\mathfrak{h}$ 上的一组线性无关的函数,因此必有 $\sigma(\mu_k)$等于某个 μ_j,否则,上面的等式就不成立. 这就证明了(2).

T 的不可约酉表示的权又称为 G 的权,它有如下的性质:

(1) $\omega\in\mathfrak{h}^*$ 是 G 的权的充分必要条件是:对每个 $\lambda\in\exp^{-1}e\cap\mathfrak{h}$,存在整数 k,使下式成立:

$$\omega(\lambda)=2k\pi,\ \lambda\in\exp^{-1}e\cap\mathfrak{h}. \tag{1.91}$$

因为 T 的不可约酉表示必为形如 $e^{i\omega(H)}$的 $\mathfrak{h}$ 上的函数,由§1.3中的(1.53)式,即得(1.91)式.

(2) 若 ω 是 G 的权，则对一切的 $\sigma\in W$，$\sigma(\omega)$ 均为 G 的权.

因为 f 是 T 上的函数，则 $f(\sigma(t))$ 也是 T 上的函数.

(3) 支配权、G 的酉对偶 $\widehat{G}$：

在 $\mathfrak{h}^*$ 中取定一个字典序，考察由(1.91)式定义的 G 的权，称 G 的权 ω 是一个**支配权**——是指对一切的 $\sigma\in W$，有下式成立：

$$\omega\geqslant\sigma(\omega),\ \sigma\in W.$$

G 的所有支配权组成的集合记为 $\widehat{G}$，并称 $\widehat{G}$ 为 G 的**酉对偶**.

$\omega\in\mathfrak{h}^*$ 是 G 的支配权的充要条件是：

(i) ω 适合(1.91)式，从而是 G 的权；

(ii) 对每个素根 $\alpha\in\Pi$，$2B(\omega,\alpha)/B(\alpha,\alpha)$ 均为非负整数，这里 $B(\cdot,\cdot)$ 是(1.47)式定义的 $\mathfrak{g}$ 上的 G 不变内积.

$\mathfrak{h}^*$ 中正根 $\alpha\in\Sigma_+$ 决定的反射 S_α 定义为

$$S_\alpha(\xi)=\xi-2B(\xi,\alpha)\alpha/B(\alpha,\alpha),\xi\in\mathfrak{h}^*. \qquad (1.92)$$

由(1.92)式，(i)、(ii)是支配权的必要条件是显然的. 对于充分性，需证明更广泛一些的内容，由下面两个引理给出：

引理1.8 若 ω 是 G 的权，则对一切素根 α，$2B(\omega,\alpha)/B(\alpha,\alpha)$ 必为整数.

证明 设 α 是素根，考虑 $\mathfrak{g}$ 的由 $\mathrm{i}H_\alpha$、X_α 和 $X_{-\alpha}$ 张成的三维单代数，它对应着 G 的三维子李群 G_3，它的复化就是复三维单代数 $\mathfrak{g}_3$. 因为 ω 是 G 的权，所以它必然是 G_3 的权，对应于 $\mathfrak{g}_3$ 的基(1.94)(见后面 1.4.6 小节)，G_3 的李代数的 Cartan 子代数中的任意一点 $\mathrm{i}H$ 可表示成

$$\mathrm{i}H=\lambda(\mathrm{i}H_1),\ H_1=H_\alpha/B(\alpha,\alpha),$$

其中 λ 是实变元，从而

$$e^{\mathrm{i}\omega(H)}=e^{\mathrm{i}\lambda B(\omega,\alpha)/B(\alpha,\alpha)}$$

是 G_3 的权在由(1.94)式给出的 $\mathfrak{g}_3$ 基之下的表达式. 因为 G_3 的任意一个权必为 $\mathfrak{g}_3$ 的某些有限维不可约酉表示的权，由命题 1.15 (见后面 1.4.6 小节)即得

$$2B(\omega,\alpha)/B(\alpha,\alpha)$$

必为整数. ∎

记 $\Pi=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_l\}$为 $\mathfrak{g}$ 的素根系，$S_1,\cdots,S_l$ 是 $\alpha_1,\cdots,\alpha_l$ 决定的反射，则有

引理 1.9　设 $\mu\in\mathfrak{h}^*$，则对一切 $\sigma\in W$，$\mu\geqslant\sigma(\mu)$的充分必要条件是

$$2B(\mu,\alpha_k)/B(\alpha_k,\alpha_k)\geqslant 0,\ k=1,2,\cdots,l. \tag{1.93}$$

证明　由(1.92)式，必要性显然. 反之，设(1.93)成立，因为 Weyl 群由 $S_1,\cdots,S_l$ 生成，所以每个 $\sigma\in W$ 可表示成

$$\sigma=S_{i_1}S_{i_2}\cdots S_{i_k},$$

并称 σ 的长度为 k.

对 σ 的长度作归纳证明：当 $k=1$ 时，由于(1.92)式，必有 $\mu\geqslant\sigma(\mu)$. 设对 $k=1,2,\cdots,m$ 命题成立，当 $k=m+1$ 时，记 $\sigma=\sigma' S_p$，$\sigma'=S_{i_1}\cdots S_{i_m}$，则有

$$S_p(\mu)=\mu-2B(\mu,\alpha_p)\alpha_p/B(\alpha_p,\alpha_p),$$

$$\sigma(\mu)=\sigma'(\mu)-2B(\mu,\alpha_p)\sigma'(\alpha_p)/B(\alpha_p,\alpha_p).$$

若 $\sigma'(\alpha_p)\geqslant 0$，由引理的充要条件，即得 $\sigma(\mu)\leqslant\sigma'(\mu)$. 而由归纳假设 $\sigma'(\mu)\leqslant\mu$，所以 $\sigma(\mu)\leqslant\mu$.

若 $\sigma'(\alpha_p)<0$，则必存在正整数 n $(1\leqslant n\leqslant m)$，使得

$$T'(\alpha_p)=S_{i_{n+1}}\cdots S_{i_m}(\alpha_p)=\alpha_{i_n},\ T=S_{i_1}\cdots S_{i_{n-1}},$$

$$\sigma'=TS_{i_n}T'.$$

否则，由素根决定的反射 S_i 仅将 α_i 变成 $-\alpha_i$，而将其余正根变成正根这一性质，与 $\sigma'(\alpha_p)<0$ 产生矛盾.

由 $T'(\alpha_p)=\alpha_{i_n}$可得

$$T'S_p(\alpha_p)=-\alpha_{i_n}=S_{i_n}(\alpha_{i_n}),$$

即

$$T'S_p(T')^{-1}(\alpha_{i_n})=S_{i_n}(\alpha_{i_n}).$$

注意到 Weyl 群元是根系 Σ 的置换群，且由它在 Σ_+上的作用完全决定，即 $\sigma\in W$、$\sigma(\Sigma_+)$中的元是由互不相等的根组成，$\pm\alpha$ 中必有且只有一个属于 $\sigma(\Sigma_+)$. 具体写出 $\sigma S_i\sigma^{-1}$，就可得知它只将一个正根变成负根，将其余的正根均变为正根，这就证明了

$$T'S_p(T')^{-1} = S_{i_n},\ 即\ T'S_p = S_{i_n}T'.$$

从而得到

$$\sigma = \sigma' S_p = TS_{i_n}T'S_p = TT'.$$

即 σ 是一个长度为 $m-1$ 的 Weyl 群中的元. 由归纳假设,必有 $\mu \geqslant \sigma(\mu)$. 从而当 $k=m+1$ 时引理也成立. 证得引理 1.9 为真. ▌

对上面的证明稍加改动,即可得到若(1.93)式中的 l 个数全大于零,则 σ 非恒等变换时,就有

$$\mu > \sigma(\mu),$$

从而只要 $\sigma_1 \neq \sigma_2$,就有 $\sigma_1(\mu) \neq \sigma_2(\mu)$.

1.4.6 三维单代数的有限维不可约表示

记 $\mathfrak{g}_3$ 为三维的复单代数,它的 Weyl 基是 H_α、E_α 和 $E_{-\alpha}$, $\alpha > 0$. 令

$$H = H_\alpha / B(\alpha,\alpha), E_+ = \sqrt{\frac{2}{B(\alpha,\alpha)}} E_\alpha,$$

$$E_- = \sqrt{\frac{2}{B(\alpha,\alpha)}} E_{-\alpha}. \tag{1.94}$$

则 $\mathfrak{g}_3$ 在这组新基下的结构公式是

$$[H,E_+] = E_+, [H,E_-] = -E_-,\ [E_+,E_-] = 2H.$$

设 (ρ,V) 是 $\mathfrak{g}_3$ 的一个有限维不可约表示,因为 $\mathfrak{g}_3$ 的 Weyl 群由关于原点的反射生成,所以若 m 是 ρ 的权, $-m$ 也必为 ρ 的权. 设 $k \geqslant 0$ 为表示 (ρ,V) 的最高权, v_k 是一个非零的权向量,由 1.4.5 小节的(1.86)式,有 $\rho(E_+)v_k = 0$,令

$$v_{k-1} = \rho(E_-)v_k, v_{k-2} = \rho(E_-)^2 v_{k-2}, \cdots,$$

$$v_{k-s} = \rho(E_-)^s v_k, \cdots. \tag{1.95}$$

用(1.85)式的方法计算并用归纳法证明,可得

$$\rho(E_+)v_m = (k-m)(k+m+1)v_{m+1},$$

$$\rho(E_+)\rho(E_-)v_p = (k+p)(k-p+1)v_p.$$

由此可得 $\rho(E_-)v_{-k} = 0$,而 k 必为非负整数或半整数,即 $k = \frac{1}{2}n$, $n = 0,1,2,\cdots$.

这就证明了如下命题：

命题 1.14 设(ρ,V)是$\mathfrak{g}_3$的一个有限维不可约复表示，则存在非负的整数或半整数k，使得V的复维数是$2k+1$，且可在V中选一组基：

$$v_k, v_{k-1}, \cdots, v_r, \cdots, v_{1-k}, v_{-k}$$

使下列诸式成立：

$$\left.\begin{aligned}
&\rho(H)v_m = mv_m, m = k, k-1, \cdots, -k,\\
&\rho(E_-)v_m = v_{m-1}, m = k, k-1, \cdots, 1-k,\\
&\rho(E_+)v_m = (k-m)(k+m+1)v_{m+1},\\
&\qquad\qquad m = k-1, \cdots, -k,\\
&\rho(E_+)v_k = 0,\ \rho(E_-)v_{-k} = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{1.96}$$

其中k称为表示ρ的最高权，因此$\mathfrak{g}_3$的两个表示等价当且仅当它们的最高权相等.

反之，若给了一个非负的整数或半整数，则由(1.96)式定义的$\mathfrak{g}_3$到$\mathrm{gl}(V)$中的线性映射ρ就定义了$\mathfrak{g}_3$的最高权为k的有限维不可约表示.

由命题 1.14 容易得出如下命题：

命题 1.15 设(ρ,V)是$\mathfrak{g}_3$的一个有限维表示，对应于(1.94)式给出的$\mathfrak{g}_3$的基，v_r是一个权为r的权向量，设p、q是非负整数，使得

$$\rho(E_+)^s v_r \neq 0,\ 1 \leqslant s \leqslant q,$$
$$\rho(E_-)^s v_r \neq 0,\ 1 \leqslant s \leqslant p.$$

但是

$$\rho(E_+)^{q+1} v_r = 0,\ \rho(E_-)^{p+1} v_r = 0,$$

则$2r = p - q$.

1.4.7 紧致李群上中心函数的积分公式

由命题 1.12，需要具体计算紧致李群上的中心函数的积分，即在映射

$$G/T \times T \to G,\ (yT, t) \to yty^{-1} \tag{1.97}$$

之下来计算 G 的 Haar 测度.

取 G 的一个忠实酉表示，或至少局部同构的酉表示 ρ，这样的 ρ 是很多的，则 $\rho(x)$ 是 G 上复值函数的阵，令

$$\delta(x) = \rho(x)^{-1}\mathrm{d}\rho(x),$$

则 $\delta(x)$ 是 G 上的左不变 1-形式的基组成的矩阵，从而

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{Tr}(\delta(x)\cdot\overline{\delta(x)'})$$

就是 G 上的双不变的 Riemann 度量.

在映射(1.97)之下取 $x=yty^{-1}$ 进行计算，可得

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\rho(x) = &(\mathrm{d}\rho(y))\cdot\rho(t)\cdot\rho(y^{-1})\\&+\rho(y)(\mathrm{d}\rho(t))\cdot\rho(y^{-1})\\&+\rho(y)\rho(t)\mathrm{d}\rho(y^{-1}).\end{aligned}$$

因为

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\rho(y^{-1}) &= \mathrm{d}\rho(y)^{-1}\\&=-\rho(y^{-1})(\mathrm{d}\rho(y))\rho(y^{-1}),\end{aligned}$$

这就得到

$$\begin{aligned}\delta(x) &= \rho(x^{-1})\mathrm{d}\rho(x)\\&=\rho(y)\rho(t^{-1})\delta(y)\rho(t)\rho(y^{-1})\\&\quad+\rho(y)\delta(t)\rho(y^{-1})\\&\quad-\rho(y)\delta(y)\rho(y^{-1}).\end{aligned}$$

将 y 用 Weyl 基表出：

$$y=\exp\left(\sum_{\alpha\in\Sigma}x_\alpha E_\alpha+\sum_{k=1}^{r}u_j(\mathrm{i}H_j)\right),$$

它适合 $\overline{x_\alpha}=-x_{-\alpha}$，对 $\alpha\in\Sigma$ 均成立，则可得

$$\begin{aligned}\delta(y) &= \rho(y^{-1})\mathrm{d}\rho(y)\\&=\sum_{\alpha\in\Sigma}\mathrm{d}x_\alpha\rho(E_\alpha)+\sum_{k=1}^{r}\mathrm{d}u_j\rho(\mathrm{i}H_j).\end{aligned}$$

再置

$$t=\exp\sum_{k=1}^{r}h_k(\mathrm{i}H_k)\equiv\exp h,\ h\in\mathfrak{h},$$

就有

$$\delta(t)=\sum_{k=1}^{r}\mathrm{d}h_k\rho(\mathrm{i}H_k),$$

$$\rho(t^{-1})\rho(E_\alpha)\rho(t)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha(h)}\rho(E_\alpha).$$

在上面运算中 G 的表示 ρ 的微分是李代数 $\mathfrak{g}$ 的表示，仍简记为 ρ，它自然地复化为 $\mathfrak{g}$ 的复化的表示，由此可得

$$\delta(x)=\rho(y)\Big(\sum_{\alpha\in\Sigma}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha(h)}-1)\mathrm{d}x_\alpha\rho(E_\alpha)+\sum_{k=1}^{r}\mathrm{d}h_k\rho(\mathrm{i}H_k)\Big)\rho(y^{-1}).$$

当取 $\mathrm{i}H_1,\cdots,\mathrm{i}H_r,X_\alpha,X_{-\alpha},\alpha\in\Sigma$ 为 $\mathfrak{g}$ 的标准正交基时，$\rho(\mathrm{i}H_1),\cdots,\rho(\mathrm{i}H_r),\rho(E_\alpha),\rho(E_{-\alpha})$ 关于内积 $\mathrm{Tr}(X\overline{Y}')$ 是正交且等长的，从而忽略常数因子，得到

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s^2&=\sum_{\alpha\in\Sigma}|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha(h)}-1|^2\mathrm{d}x_\alpha\mathrm{d}\overline{x}_\alpha+\sum_{k=1}^{r}(\mathrm{d}h_k)^2\\&=2\sum_{\alpha>0}|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha(h)}-1|^2\mathrm{d}x_\alpha\mathrm{d}\overline{x}_\alpha+\sum_{k=1}^{r}(\mathrm{d}h_k)^2.\end{aligned}$$

注意到 $\mathrm{d}x_\alpha=\mathrm{d}u_\alpha+\mathrm{i}\mathrm{d}v_\alpha$，$u_\alpha,v_\alpha,\alpha\in\Sigma$ 是独立变元，而 $\sum_{\alpha>0}\mathrm{d}x_\alpha\mathrm{d}\overline{x}_\alpha$ 是 G/T 的 G 不变 Riemann 度量，从面可得

$$\mathrm{d}x=\prod_{\alpha>0}|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha(h)}-1|^2\mathrm{d}h\mathrm{d}(yT).$$

这里省略了常数因子，$\mathrm{d}h$ 是 T 上的 Haar 测度，$\mathrm{d}(yT)$ 是 G/T 上的 G 不变测度.

由恒等式

$$|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha(h)}-1|^2=\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{1}{2}\alpha(h)}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{1}{2}\alpha(h)}\right|^2,$$

令

$$D(h)=\prod_{\alpha>0}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{1}{2}\alpha(h)}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{1}{2}\alpha(h)}\right),\tag{1.98}$$

则 G 上的 Haar 测度就等于

$$\mathrm{d}x=|D(h)|^2\mathrm{d}h\,\mathrm{d}(yT).$$

现取 Q 为(1.54)式定义的 Cartan 子群 T 在 $\mathfrak{h}$ 上的积分区

域，$|Q|$表示Q的欧氏体积，$|W|$表示Weyl群的阶，$\mathrm{d}(yT)$取G/T上的规格化测度，即总体积为1，$\mathrm{d}h$是T上的也就等于Q上的欧氏测度，则在取G的规格化Haar测度时，G上的中心函数f在G上的积分就为

$$\int_G f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{|W| \cdot |Q|}\int_Q f(\exp h)|D(h)|^2\mathrm{d}h. \quad (1.99)$$

这已变成普通的欧氏积分了.

函数$D(h)$具有十分重要的性质：它是Weyl群的反对称函数. 设S_i是引理1.9中素根α_i决定的反射，由1.2.9节中的Weyl群的性质(4)，S_i仅将α_i变成$-\alpha_i$，而将其余正根仍变成正根，就有

$$\begin{aligned}
&D(S_i(h)) \\
&= \prod_{\alpha>0}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{1}{2}\alpha(S_i(h))} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{1}{2}\alpha(S_i(h))}\right) \\
&= \prod_{\alpha>0}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{1}{2}S_i(\alpha)(h)} - \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}S_i(\alpha)(h)}\right) \\
&= -D(h) = \det S_i\, D(h),
\end{aligned}$$

式中$\det S_i$表示正交变换S_i的行列式，因Weyl群的任一元$\sigma\in W$均可表成若干个$S_1,\cdots,S_l$的积，从而得到：对一切$\sigma\in W$均有下式成立：

$$D(\sigma(h)) = \det\sigma\, D(h).$$

1.4.8　反对称三角多项式

设

$$P(h) = \sum_{\text{有限和}} C_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mu_k(h)},$$

其中$\mu_k\in\mathfrak{h}^*$，则称$P(h)$是$\mathfrak{h}$上的一个三角多项式，其中μ_k称为$P(h)$的权. 若$P(h)$还适合于对一切的$\sigma\in W$有

$$P(\sigma(h)) = \det\sigma P(h),$$

则称$P(h)$为$\mathfrak{h}$上的一个反对称三角多项式.

引理1.10　设$P(h)$是一个非零的反对称三角多项式，若$\mu\in\mathfrak{h}^*$是$P(h)$的权，则对一切$\sigma\in W$，$\sigma(\mu)$也是$P(h)$的权.

证明　设

$$P(h)=\sum_{k=1}^{n}C_k e^{i\mu_k(h)},$$

其中 $P(h)$ 的权 $\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n$ 互不相等，则由 $P(h)$ 反对称，得

$$\begin{aligned}P(h)&=\det\sigma P(\sigma(h))\\&=\sum_{k=1}^{n}\det\sigma C_k e^{i\mu_k(\sigma(h))}\\&=\sum_{k=1}^{n}\det\sigma C_k e^{i\sigma(\mu_k)(h)}.\end{aligned}$$

这说明 $\{\mu_1,\cdots,\mu_n\}$ 与 $\{\sigma(\mu_1),\cdots,\sigma(\mu_n)\}$ 是同一个集合，即得 μ_k 是 $P(h)$ 的权，则 $\sigma(\mu_k)$ 也是 $P(h)$ 的权，对任意的 $\sigma\in W$ 均成立. ▌

设 $\Pi=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_l\}$ 是紧致李群 G 的李代数 $\mathfrak{g}$ 的素根系，$\mu\in\mathfrak{h}^*$，μ 称为一个支配权，是指

$$2B(\mu,\alpha_k)/B(\alpha_k,\alpha_k)\geqslant 0,\ k=1,2,\cdots,l;$$

而称 μ 是一个严格支配权，是指

$$2B(\mu,\alpha_k)/B(\alpha_k,\alpha_k)>0,\ k=1,2,\cdots,l.$$

引理 1.11 设 μ 是支配权，令

$$P_\mu(h)=\sum_{\sigma\in W}\det\sigma e^{i\sigma(\mu)(h)},$$

则 $P_\mu(h)$ 是一个反对称的三角多项式，并称 $P_\mu(h)$ 为一个基本反对称三角多项式.

证明 由于

$$\begin{aligned}P_\mu(\sigma(h))&=\sum_{\eta\in W}\det\eta e^{i\eta(\mu)(\sigma(h))}\\&=\sum_{\eta\in W}\det\eta e^{i\sigma^{-1}\eta(\mu)(h)}\\&=\det\sigma\sum_{\eta\in W}\det(\sigma^{-1}\eta)e^{i\sigma^{-1}\eta(\mu)(h)}\\&=\det\sigma\sum_{\eta\in W}\det\eta e^{i\eta(\mu)(h)}\\&=\det\sigma P_\mu(h).\end{aligned}$$

从而 $P_\mu(h)$ 为反对称三角多项式. ▌

引理 1.12 任一反对称三角多项式必可表示成有限个基本

反对称三角多项式的线性和.

证明　设 $P(h)$ 是一个反对称三角多项式, $\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_s$ 是 $P(h)$ 中所有互不相同的支配权,它对应 $P(h)$ 中的项

$$C_1 e^{i\mu_1(h)},\cdots,C_s e^{i\mu_s(h)},$$

则有

$$P(h)-\sum_{k=1}^{s}C_k P_{\mu_k}(h)$$

的支配权只有零. 由引理 1.10,得上式恒等于零,即

$$P(h)=\sum_{k=1}^{s}C_k P_{\mu_k}(h).\qquad \blacksquare$$

引理 1.13　若 μ 是支配权,但不是严格支配权,则必有

$$P_\mu(h)\equiv 0.$$

证明　设

$$P_\mu(h)=\sum_{\sigma\in W}\det\sigma e^{i\sigma(\mu)(h)},$$

因为 μ 不是严格支配权,则必存在正整数 $k(1\leqslant k\leqslant l)$,使得 $2B(\mu,\alpha_k)/B(\alpha_k,\alpha_k)=0$,由(1.92)式得

$$S_k(\mu)=\mu,$$

从而得到 $\sigma S_k(\mu)=\sigma(\mu)$. 由于 $P_\mu(h)$ 为反对称三角多项式,故可得

$$\begin{aligned}-P_\mu(h)=P_\mu(S_k(h))&=\sum_{\sigma\in W}\det\sigma e^{i\sigma(\mu)(S_k(h))}\\&=\sum_{\sigma\in W}\det\sigma e^{iS_k\sigma(\mu)(h)}\\&=\sum_{\sigma\in W}\det S_k\det(S_k\sigma S_k)\det S_k e^{iS_k\sigma S_k S_k(\mu)(h)}\\&=\sum_{\sigma\in W}\det(S_k\sigma S_k)e^{iS_k\sigma S_k(\mu)(h)}.\end{aligned}$$

因为 $\sigma\to S_k\sigma S_k$ 是 W 的自同构,所以上式变成

$$-P_\mu(h)=\sum_{\sigma\in W}\det\sigma e^{i\sigma(\mu)(h)}=P_\mu(h).$$

即得

$$P_\mu(h)\equiv 0.\qquad \blacksquare$$

引理 1.14　设 μ 是 $\mathfrak{h}'$ 中的严格支配权，若对任意的 σ_1、$\sigma_2\in W$，当 $\sigma_1\neq\sigma_2$ 时，恒有 $\sigma_1(\mu)-\sigma_2(\mu)$ 是 G 的非零权，则有下式成立：

$$\frac{1}{|W|\cdot|Q|}\int_Q|P_\mu(h)|^2\mathrm{d}h=1.$$

证明　因为

$$\begin{aligned}|P(h)|^2&=\sum_{\sigma\in W}\det\sigma\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sigma(\mu)(h)}\sum_{\eta\in W}\det\eta\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\eta(\mu)(h)}\\&=|W|+\sum_{\sigma\neq\eta}\det(\sigma\eta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\sigma(\mu)-\eta(\mu))(h)},\end{aligned}$$

从而得到

$$\begin{aligned}&\frac{1}{|W|\cdot|Q|}\int_Q|P(h)|^2\mathrm{d}h\\&=1+\sum_{\sigma\neq\eta}\frac{1}{|W|\cdot|Q|}\det(\sigma\eta)\int_Q\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\sigma(\mu)-\eta(\mu))(h)}\mathrm{d}h.\end{aligned}$$

因为 $\sigma\neq\eta$，所以 $\sigma(\mu)-\eta(\mu)$ 是 G 的非零权，从而它在 Q 上的积分必为零. 这就证明了引理. ▍

引理 1.15　(1.98)式定义的 $D(h)$ 可表示成

$$D(h)=\sum_{\sigma\in W}\det\sigma\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sigma(\delta)(h)}=P_\delta(h),$$

其中 δ 是全体正根之和的一半，即

$$\delta=\frac{1}{2}\sum_{\alpha>0}\alpha.$$

证明　将(1.98)式展开，得

$$D(h)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta(h)}+\text{其余项},$$

其余项合并后的非零项必为 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mu(h)}$ 形的函数，其中

$$\mu=\frac{1}{2}\sum_{\alpha>0}\varepsilon_\alpha\alpha,\ \ \varepsilon_\alpha=\pm1,$$

且至少有一个 $\varepsilon_\alpha=-1$，则 μ 必然不是严格支配权. 首先对 δ，由素根 α_i 决定的反射 S_i 的性质，可得 $S_i(\delta)=\delta-\alpha_i$.
但由(1.92)式有

$$S_i(\delta)=\delta-2B(\delta,\alpha_i)\alpha_i/B(\alpha_i,\alpha_i),$$

从而有

$$2B(\delta,\alpha_i)/B(\alpha_i,\alpha_i)=1,\ i=1,2,\cdots,l,$$

即 δ 是严格支配权.

再由 μ 的表达式,必有 $\mu=\delta-\nu$,其中 ν 是若干个正根之和.由素根系的性质(3),可得

$$\nu=\sum_i m_i\alpha_i$$

是素根的非负整系数项的和,因为

$$B(\nu,\nu)=\sum_i m_i B(\nu,\alpha_i)>0,$$

所以存在下标 k $(1\leqslant k\leqslant l)$使得

$$m_k B(\nu,\alpha_k)>0,$$

又因为正根均为 G 的权,从而

$$2B(\nu,\alpha_k)/B(\alpha_k,\alpha_k)$$

为正整数,于是得到

$$\begin{aligned}&2B(\mu,\alpha_k)/B(\alpha_k,\alpha_k)\\&\quad=2B(\delta,\alpha_k)/B(\alpha_k,\alpha_k)-2B(\nu,\alpha_k)/B(\alpha_k,\alpha_k)\\&\quad=1-2B(\nu,\alpha_k)/B(\alpha_k,\alpha_k)\leqslant 0.\end{aligned}$$

这就表明了 $D(h)-P_\delta(h)$是反对称的三角多项式,且不含有严格支配权,由引理 1.12 和引理 1.13,这个差必恒为零,即得 $D(h)=P_\delta(h)$. ▌

1.4.9 紧致李群的不可约酉表示及其特征

设 ρ 为紧致连通李群 G 的一个不可约酉表示,由(1.82)式,ρ 的特征在 G 的 Cartan 子群 T 上的值是

$$\chi(t)=\chi(\exp h)=\sum_{k=1}^{s}m_k e^{i\mu_k(h)},$$

其中 m_k $(k=1,2,\cdots,s)$是正整数,$\mu_1,\cdots,\mu_s$ 是 ρ 的所有互不相等的权.设 ω_0 是 ρ 的所有权中排序最大的那个权,它的重数记为 m_0,则称 ω_0 是不可约酉表示 ρ 的最高权.显然,ω_0 是 G 的支配权,即 $\omega_0\in\hat{G}$.

命题 1.16 设 G 是一个连通的紧致李群,ρ 是 G 的以 ω_0 为

最高权的不可约酉表示，则权 ω_0 的重数 $m_0=1$，ρ 的特征 $\chi_{\omega_0}(x)$ 是 G 上的中心函数，在 G 的一个 Cartan 子群 T 上，它等于

$$\begin{aligned}\chi_{\omega_0}(t) &= \chi_{\omega_0}(\exp h)\\ &= \frac{\sum\limits_{\sigma\in W}\det\sigma e^{i\sigma(\omega_0+\delta)(h)}}{\sum\limits_{\sigma\in W}\det\sigma e^{i\sigma(\delta)(h)}}\\ &\equiv \frac{D_{\omega_0}(h)}{D(h)},\end{aligned}$$

其中 W 是 G 的 Weyl 群，$\det\sigma$ 是正交变换 $\sigma\in W$ 的行列式，δ 是全体正根之和的一半，$h\in\mathfrak{h}$，$\mathfrak{h}$ 是 T 对应的 Cartan 子代数，且 $T=\exp\mathfrak{h}$.

证明 由命题 1.12 和(1.99)式可得

$$\begin{aligned}1 &= \int_G|\chi_{\omega_0}(x)|^2\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{|W|\cdot|Q|}\int_Q|\chi_{\omega_0}(\exp h)|^2|D(h)|^2\mathrm{d}h,\end{aligned}$$

其中 $D(h)=P_\delta(h)$ 是反对称三角多项式，

$$P_\delta(h)=\sum_{\sigma\in W}\det\sigma e^{i\sigma(\delta)(h)}.$$

因为 $\chi_{\omega_0}(\exp h)$ 是 Weyl 群对称的三角多项式，故 $\chi_{\omega_0}(\exp h)D(h)$ 仍然是一个反对称三角多项式，由引理 1.12 及 ω_0 是 ρ 的最高权，可得

$$\begin{aligned}\chi_{\omega_0}(\exp h)D(h) &= m_0P_{\omega_0+\delta}(h)\\ &\quad+\sum_{k=1}^{m}a_kP_{\omega_k+\delta}(h),\end{aligned}$$

其中 $P_\mu(h)$ 是基本反对称三角多项式，$\omega_0,\omega_1,\cdots,\omega_m$ 是表示 ρ 中互不相等的支配权.

因为 $\sigma\in W$ 是根系 Σ 的置换权，当 σ 不是恒等变换时，它必将某些正根变成负根，而将另外一些正根仍变成正根，从而有

$$\sigma(\delta)=\delta-\nu,\quad \nu\geqslant 0,$$

ν 是若干正根之和，$\nu=0$ 的充要条件是 σ 为恒等变换，因此，当 σ_1、

$\sigma_2 \in W$，且 $\sigma_1 \neq \sigma_2$ 时，$\sigma_1(\delta)-\sigma_2(\delta)$必是某些正根的整系数项的和. 因为根均是 G 的权，所以 $\sigma_1(\delta)-\sigma_2(\delta)$必是 G 的权，且 $\sigma_1 \neq \sigma_2$ 时，$\sigma_1(\delta)-\sigma_2(\delta)$是 G 的非零权，从而由 T 的不可约酉表示的正交关系，就有当 $\sigma_1(\delta)-\sigma_2(\delta) \neq 0$ 时

$$\int_Q e^{i(\sigma_1(\delta)-\sigma_2(\delta))(h)} dh = 0.$$

因此就可得当 $0 \leqslant i,j \leqslant m$； $i \neq j$ 时

$$\int_Q P_{\omega_i+\delta}(h) P_{\omega_j+\delta}(h) dh = 0.$$

又因为 $\omega_k \quad (k=0,1,\cdots,m)$是支配权，$\delta$ 是严格支配权，所以 $\omega_k+\delta$ $(k=0,1,\cdots,m)$均为严格支配权. 由引理 1.14 即得

$$\int_Q |P_{\omega_k+\delta}(h)|^2 dh = |W| \cdot |Q|, \ k = 0,1,\cdots,m.$$

从而可得

$$1 = \int_Q |\chi_{\omega_0}(x)|^2 dx = m_0^2 + \sum_{k=1}^{m} |a_k|^2.$$

因为 m_0 为正整数，故只能是

$$m_0 = 1, \ a_1 = a_2 = \cdots = a_m = 0.$$

从而证明了命题. ▍

命题 1.17 设(ρ,V)是连通紧致李群 G 的以 ω_0 为最高权的不可约酉表示，d_{ω_0}是 V 的复维数，则有

$$d_{\omega_0} = \prod_{\alpha>0} B(\omega_0 + \delta,\alpha) \Big/ \prod_{\alpha>0} B(\delta,\alpha).$$

证明 因为

$$d_{\omega_0} = \mathrm{Tr}\rho(e) = \chi_{\omega_0}(e),$$

由命题 1.16，只须计算下面的 $t \to 0$ 时的极限

$$\chi_{\omega_0}(\exp tH_\delta) = P_{\omega_0+\delta}(tH_\delta)/P_\delta(tH_\delta),$$

注意到

$$\begin{aligned}\sigma(\omega_0 + \delta)(tH_\delta) &= \delta(t\sigma(H_{\omega_0+\delta})) \\ &= \sigma^{-1}(\delta)(tH_{\omega_0+\delta}),\end{aligned}$$

从而可得

$$\chi_{\omega_0}(\exp tH_\delta) = P_\delta(tH_{\omega_0+\delta})/P_\delta(tH_\delta).$$

因为 $P_\delta(h)=D(h)$，由(1.98)式，上式分子分母变成乘积形式，将每个因子展开成幂级数，约去共同的 t 的因子再令 $t\to 0$，就证明了本命题. ▌

综合以上讨论，连通紧致李群不可约酉表示等价类由其最高权 ω_0 唯一决定，其特征公式和表示的维数公式也已得出，且 ω_0 是 G 的支配权，即 $\omega_0\in\widehat{G}$. 反之，对每个 $\lambda\in\widehat{G}$，是否存在一个以 λ 为最高权的不可约酉表示呢？回答是肯定的，见以下命题.

命题 1.18 对每个 $\lambda\in\widehat{G}$，必然存在一个以 λ 为最高权的 G 的有限维不可约酉表示.

这一证明较长，也较为复杂，读者可参考本书参考文献[5]，在此就不给出了.

§1.5 紧致李群与紧致齐性空间上的调和分析

1.5.1 紧致李群与紧致齐性空间上的 Fourier 级数

设 G 为连通的紧致李群，$\widehat{G}$是 G 的酉对偶，对每个 $\lambda\in\widehat{G}$，取一个 G 的以 λ 为最高权的不可约酉表示 $\rho_\lambda(x)$，d_λ 是表示 ρ_λ 的维数，$\chi_\lambda(x)$是表示 ρ_λ 的特征，由紧致李群的表示理论，对 G 的每个 Cartan子群 T，必有一个 G 的酉矩阵表示 $\rho_\lambda(x)$，使得 $\rho_\lambda(T)$是对角酉阵. 对这样的 $\rho_\lambda(x)$，记

$$\rho_\lambda(x) = \left(u_{ij}^\lambda(x)\right)_{1\leqslant i,j\leqslant d_\lambda},$$

$$\mathrm{e}_\lambda(x) = \left(e_{ij}^\lambda(x)\right)_{1\leqslant i,j\leqslant d_\lambda} = d_\lambda^{\frac{1}{2}}\rho_\lambda(x),$$

则由命题 10、命题 11 及 Peter-Weyl 定理，函数系

$$\{e_{ij}^\lambda(x), 1\leqslant i,j\leqslant d_\lambda, \lambda\in\widehat{G}\} \tag{1.100}$$

是 $L^2(G)$的完备标准正交函数系. 紧致李群 G 上可积函数按这组基展开，就得到了 Fourier 级数.

对 $f\in L(G)$，$\mathrm{d}x$ 是 G 上的规格化 Haar 测度，置

$$\hat{f}_\lambda = \int_G f(x)\rho_\lambda(x^{-1})\mathrm{d}x, \tag{1.101}$$

$$C_\lambda(f) = \int_G f(x)e_\lambda(x^{-1})\mathrm{d}x = d_\lambda^{\frac{1}{2}}\hat{f}_\lambda. \qquad (1.102)$$

$\hat{f}_\lambda$称为 f 的表示矩阵,$C_\lambda(f)$为 f 的 Fourier 系数矩阵,则 $f \in L(G)$的 Fourier 级数是

$$\begin{aligned} f(x) &\sim \sum_{\lambda\in\hat{G}} \mathrm{Tr}(C_\lambda(f)e_\lambda(x)) \\ &= \sum_{\lambda\in\hat{G}} d_\lambda \mathrm{Tr}(\hat{f}_\lambda \rho_\lambda(x)) \\ &= \sum_{\lambda\in\hat{G}} d_\lambda \chi_\lambda * f(x). \end{aligned} \qquad (1.103)$$

在(1.103)式中给出了紧致李群上的 Fourier 级数的三种不同表达方式,它们分别有不同的用处. 对于第三个表达式中函数的卷积,将在下一节中给出定义.

设 M 为连通的紧致齐性空间,G 是 M 的等度量变换群的连通分支,且 G 在 M 上的作用是可递的. K 是 M 在 o 点的迷向子群,对 $\lambda\in G$ 及 G 的以 λ 为最高权的不可约酉表示 $\rho_\lambda(x)$,置

$$I_\lambda = \int_K \rho_\lambda(k)\mathrm{d}k, \qquad (1.104)$$

其中 $\mathrm{d}k$ 是 K 上的规格化的 Haar 测度. 再令

$$\hat{M} = \{\lambda \in \hat{G}, \text{且 } I_\lambda \neq 0 \text{ 阵}\}, \qquad (1.105)$$

$\hat{M}$称为 M 的酉对偶.

当 $I_\lambda\neq 0$ 时,表明了 ρ_λ 在 K 上的限制含有 K 的恒等表示. 由表示的性质,可选取这样的 $\rho_\lambda(x)$,使得

$$I_\lambda = \mathrm{diag}\,(1,\cdots,1,0,\cdots,0),$$

并称这样的 ρ_λ 和 I_λ 为标准的.

用(1.59)式定义的 $M\to P\subset G$, $m\to p(m)$的映射,d_λ 仍是表示 ρ_λ 的维数,置

$$\begin{cases} T_\lambda(m) = \rho_\lambda(p(m))I_\lambda, \\ e_\lambda(m) = e_\lambda(p(m))I_\lambda \\ \qquad\quad = d_\lambda^{\frac{1}{2}}\ T_\lambda(m) = (e_{ij}^\lambda(m)), \\ \chi_\lambda(m) = \mathrm{Tr}(T_\lambda(m)). \end{cases} \qquad (1.106)$$

则当对所有的 $\lambda\in\widehat{M}$，ρ_λ 和 I_λ 均为标准时，函数系

$$\{e^\lambda_{ij}(m),1\leqslant i,j\leqslant d_\lambda \text{ 且 } e^\lambda_{ij}(m)\neq 0,\lambda\in\widehat{M}\}\quad(1.107)$$

是 $L^2(M)$的一组完备标准正交函数系.

对 $f\in L(M)$，令

$$\hat{f}_\lambda=\int_M f(m)\,\overline{T_\lambda(m)}'\mathrm{d}m,$$

$$C_\lambda(f)=\int_M f(m)\,\overline{e_\lambda(m)}'\mathrm{d}m=d_\lambda^{\frac{1}{2}}\hat{f}_\lambda,$$

其中 $\mathrm{d}m$ 是 M 上规格化的 G 不变测度. 并称 $\hat{f}_\lambda$ 为 f 的表示矩阵，$C_\lambda(f)$是 f 的 Fourier 系数矩阵，则 f 的 Fourier 级数表示成

$$\begin{aligned}f(m)&\sim\sum_{\lambda\in\widehat{M}}\mathrm{Tr}(C_\lambda(f)e_\lambda(m))\\&=\sum_{\lambda\in\widehat{M}}d_\lambda\mathrm{Tr}(\hat{f}_\lambda T_\lambda(m))\\&=\sum_{\lambda\in\widehat{M}}d_\lambda\chi_\lambda*f(m),\end{aligned}\quad(1.108)$$

其中卷积的定义也在下一节给出. 下面先对在(1.106)中定义的 M 上的函数矩阵 $T_\lambda(m)$与 $e_\lambda(m)$以及函数 $\chi_\lambda(m)$作一些说明.

首先，Haar 测度 $\mathrm{d}k$ 有如下熟知的性质，即对任意固定的 a、$b\in K$和任意的 $k\in K$，有下式成立：

$$\mathrm{d}(akb)=\mathrm{d}k,\mathrm{d}k^{-1}=\mathrm{d}k,$$

由此可作积分的变量置换，即

$$\int_K f(akb)\mathrm{d}k=\int_K f(akb)\mathrm{d}(akb)=\int_K f(k)\mathrm{d}k,$$

$$\int_K f(k^{-1})\mathrm{d}k=\int_K f(k^{-1})\mathrm{d}k^{-1}=\int_K f(k)\mathrm{d}k.$$

由 Haar 积分的上述性质和酉表示的性质$\overline{\rho_\lambda(x)}'=\rho_\lambda(x^{-1})$，容易证明下面的引理.

引理 1.16 设 I_λ 由(1.104)式的定义，则有

$$I_\lambda^2=I_\lambda,\ \overline{I}_\lambda'=I_\lambda,\ \rho_\lambda(k)I_\lambda=I_\lambda,\ I_\lambda\rho_\lambda(k)=I_\lambda.$$

由此引理即可得：对任意的 $x\in G$ 和 $k\in K$，有

$$\rho_\lambda(xk)I_\lambda = \rho_\lambda(x)I_\lambda$$

恒成立.记 $x=p(m)k$,就有

$$\rho_\lambda(x)I_\lambda = \rho_\lambda(p(m))I_\lambda = T_\lambda(m)$$

由后者唯一确定.特别当 ρ_λ 和 I_λ 均取标准形式时,设 I_λ 的主对角线上第 $1,2,\cdots,s$ 个元素为 1,第 $s+1,\cdots,d_\lambda$ 个元素为零,则 $\rho_\lambda(x)I_\lambda$ 的第 $s+1,\cdots,d_\lambda$ 列元素均为零,而第 $1,2,\cdots,s$ 列的元素仍然是 $u_{ij}^\lambda(x)$ $(1\leqslant j\leqslant s)$.这样得到的 $s\times d_\lambda$ 个 G 上的函数是彼此正交的,且仍然适合对任意的 $k\in K$ 和 $x\in G$,有

$$u_{ij}^\lambda(xk) = u_{ij}^\lambda(x), 1\leqslant j\leqslant s$$

恒成立.

通过 M 上等度量变换群 G 的作用,每个 $f\in L(M)$ 唯一对应一个 $F\in L(G)$,它定义为

$$F(x) = f(x\cdot o),$$

且 F 是 K 右不变的,即至多除去一个零测集后,对一切 $x\in G$ 和 $k\in K$,有

$$F(xk) = F(x)$$

恒成立.反之,G 上一个 K 右不变的函数 $F\in L(G)$ 又唯一对应一个 $f\in L(M)$,适合

$$f(m) = F(p(m)), m\in M.$$

当取 M 上的 G 不变测度 $\mathrm{d}m$ 为规格化测度,且 K 和 G 上也取规格化的 Haar 测度时,就有对于 $f\in L(M)$ 和 $F\in L(G)$ 是 K 右不变的,有

$$\int_M f(m)\mathrm{d}m = \int_G f(x\cdot o)\mathrm{d}x,$$

$$\int_G F(x)\mathrm{d}x = \int_M F(p(m))\mathrm{d}m.$$

成立.

由以上的讨论和 G 上函数系(1.100)的标准正交性质,可立即推出 M 上的函数系(1.107)是标准正交的.而它的完备性就变成为在 G 上对应的函数系对于 K 右不变平方可积函数是完备的,

这是(1.100)在 $L^2(G)$中的完备性的自然推论,因为 $f(x\cdot o)$在 G 中的非零的 Fourier 系数就等于 f 在 M 中的对应的 Fourier 系数.

在(1.106)式中的函数 $\chi_\lambda(m)$还具有如下的性质:即对一切的 $k\in K$ 和 $m\in M$,有

$$\chi_\lambda(k\cdot m)=\chi_\lambda(m)$$

恒成立.这由引理 1.16 和矩阵迹的性质即可推出.

若 $f\in L(M)$,且至多除去一个零测集后,对一切的 $k\in K$ 和 $m\in M$,有

$$f(k\cdot m)=f(m)$$

恒成立.则 f 称为 K 不变的,其全体记为 $L_K(M)$.

若 $f\in L(M)$,且 f 的 Fourier 级数是

$$f(m)\sim\sum_{\lambda\in\hat{M}}a_\lambda d_\lambda\chi_\lambda(m),$$

其中 a_λ 是复数,f 称为 M 上的中心函数,其全体记为 $L_I(M)$,则显然有

$$L_I(M)\subset L_K(M).$$

但一般说来,它们是不相等的.

1.5.2 卷积及其 Fourier 级数

在李群上用群的乘法自然可以定义函数的卷积,但在紧致齐性空间上,利用等度量变换群来定义函数的卷积,是以往的研究中未曾考虑过的.例如在 R^n 中的单位球面 S^{n-1}是一个紧致齐性空间,在以往球面上的调和分析研究中,就未曾用过卷积这一方法.

设 f_1、$f_2\in L(G)$,它们的卷积定义为

$$\begin{aligned}f_1*f_2(x)&=\int_G f_1(y^{-1}x)f_2(y)\mathrm{d}y\\&=\int_G f_1(y)f_2(xy^{-1})\mathrm{d}y.\end{aligned}\tag{1.109}$$

设 f_1、$f_2\in L(M)$,它们的卷积定义为

$$f_1*f_2(m)$$

$$= \int_K \int_M f_1(k \cdot n^{-1} \cdot m) f_2(n) \mathrm{d}n, \qquad (1.110)$$

其中记号的含义是：

$$n \cdot m \equiv p(n) \cdot m, \quad n^{-1} \cdot m \equiv p(n)^{-1} \cdot m.$$

上面定义的卷积的 Fourier 系数有如下的性质：

引理 1.17 设 f_1、$f_2 \in L(G)$，则 $f_1 * f_2 \in L(G)$，且对一切的 $\lambda \in \widehat{G}$ 均有以下的等式成立：

$$(f_1 * f_2)^\wedge_\lambda = (f_1)^\wedge_\lambda (f_2)^\wedge_\lambda.$$

引理 1.18 设 f_1、$f_2 \in L(M)$，则 $f_1 * f_2 \in L(M)$，且对一切的 $\lambda \in \widehat{M}$ 均有以下的等式成立：

$$(f_1 * f_2)^\wedge_\lambda = (f_1)^\wedge_\lambda (f_2)^\wedge_\lambda.$$

引理 1.17 的证明 紧致李群 G 上的 Haar 积分有以下性质：对任意固定的 a、$b \in G$ 和 $f \in L(G)$，有

$$\int_G f(axb) \mathrm{d}x = \int_G f(x) \mathrm{d}x.$$

用 Haar 积分性质和 Fubini 定理，就能得到卷积 $f_1 * f_2$ 的可积性. 计算 $f_1 * f_2$ 的 Fourier 系数

$$\begin{aligned}
(f_1 * f_2)^\wedge_\lambda &= \int_G f_1 * f_2(x) \rho_\lambda(x^{-1}) \mathrm{d}x \\
&= \int_G \int_G f_1(y^{-1}x) f_2(y) \mathrm{d}y \rho_\lambda(x^{-1}) \mathrm{d}x \\
&= \int_G \int_G f_1(y^{-1}x) \rho_\lambda((y^{-1}x)^{-1}) f_2(y) \rho_\lambda(y^{-1}) \mathrm{d}x \mathrm{d}y \\
&= \int_G f_1(x) \rho_\lambda(x^{-1}) \mathrm{d}x \int_G f_2(y) \rho_\lambda(y^{-1}) \mathrm{d}y \\
&= (f_1)^\wedge_\lambda (f_2)^\wedge_\lambda.
\end{aligned}$$

引理 1.17 得证. ▌

引理 1.18 的证明 紧致齐性空间 M 上积分有如下性质：对任意的 $x \in G$ 和 $f \in L(M)$，有以下等式恒成立：

$$\int_M f(x \cdot m) \mathrm{d}m = \int_M f(m) \mathrm{d}m,$$

其中 $\mathrm{d}m$ 是 M 上的 G 不变测度.

$f_1 * f_2$ 的可积性仍由 M 上的 G 不变积分性质和 Fubini 定理得到. 计算 $f_1 * f_2$ 的 Fourier 系数

$$(f_1 * f_2)^\wedge_\lambda = \int_M f_1 * f_2(m)\,\overline{T_\lambda(m)}'\mathrm{d}m$$
$$= \int_M\int_K\int_M f_1(k\cdot n^{-1}\cdot m)$$
$$\times f_2(n)\mathrm{d}n\mathrm{d}k\,\overline{T_\lambda(m)}'\mathrm{d}m.$$

因为

$$\overline{T_\lambda(k\cdot n^{-1}\cdot m)}' = \overline{T_\lambda(m)}'\rho_\lambda(p(n))\rho_\lambda(k^{-1}),$$

从而可作变量置换

$$u\cdot o = k\cdot p(n)^{-1}\cdot m,$$

再用 n 记 $u\cdot o$,即得到

$$(f_1 * f_2)^\wedge_\lambda = \int_M f_1(m)\,\overline{T_\lambda(m)}'\mathrm{d}m$$
$$\times \int_K\int_M f_2(n)\rho_\lambda(k)\rho_\lambda(p(n)^{-1})\mathrm{d}n\mathrm{d}k$$
$$= \int_M f_1(m)\,\overline{T_\lambda(m)}'\mathrm{d}m$$
$$\times \int_M f_2(n)\,\overline{T_\lambda(n)}'\mathrm{d}n$$

引理 1.18 得证. ▌

1.5.3 中心函数类和广义函数类

在紧致李群和紧致齐性空间上的调和分析中,中心函数类起着重要的作用. 在紧致李群上,有如下引理:

引理 1.19 若 $f\in L_I(G)$,则对一切 $\lambda\in\widehat{G}$,均有

$$\widehat{f}_\lambda = a_\lambda(f)I_{d_\lambda}, \tag{1.111}$$

其中 $a_\lambda(f)$ 是复数, I_{d_λ} 是 d_λ 阶的单位阵. 反之, 若对一切 $\lambda\in\widehat{G}$, (1.111)式恒成立,则 $f\in L_I(G)$.

在紧致李群上,$L(G)$到 $L_I(G)$上的投影算子可具体写出来.

引理 1.20 对 $f\in L(G)$,令

$$\Pi_1 f(x) = \int_G f(yxy^{-1})\mathrm{d}y,$$

其中 $\mathrm{d}y$ 是 G 上规格化的 Haar 测度，则 Π_1 是 $L(G)$到 $L_I(G)$上的投影算子.

对紧致齐性空间 M，若 $f\in L(M)$，且至多除去一个零测集外，对一切 $k\in K$ 和 $m\in M$ 均有

$$f(k\cdot m)=f(m)$$

成立，则称 f 关于 K 为不变的，其全体记为 $L_K(M)$.

引理 1.21　对 $f\in L(M)$，令

$$\Pi_2 f(m)=\int_K f(k\cdot m)\mathrm{d}k,$$

其中 $\mathrm{d}k$ 是 K 上的规格化的 Haar 测度，则 Π_2 是 $L(M)$到 $L_K(M)$上的投影算子.

$f\in L_K(M)$的充分必要条件是：对一切的 $\lambda\in\hat{M}$，有

$$\hat{f}_\lambda=\hat{f}_\lambda I_\lambda=I_\lambda\hat{f}_\lambda I_\lambda$$

恒成立.

称 $f\in L(M)$为一个中心函数，是指对一切 $\lambda\in\hat{M}$，有

$$\hat{f}_\lambda=a_\lambda(f)I_\lambda \tag{1.112}$$

恒成立，其中 $a_\lambda(f)$是一个复数.

引理 1.22　设 M 是连通的紧致齐性空间，G 是 M 上的等度量变换群含幺元的连通分支，且 G 在 M 上可递，K 是 M 在 o 点的迷向子群，则对 $f\in L_I(G)$，令 $\Pi_3:L_I(G)\to L_I(M)$为

$$(\Pi_3 f)(x\cdot o)=\int_K f(xk)\mathrm{d}K,$$

则 Π_3 是 $L_I(G)$到 $L_I(M)$中的映射.

上面几个引理的证明，主要是用函数的性质作变量置换，得到一个常量阵的参变元表达式，再对参变元积分，就可得到所需要的结论，复杂一些的情形是在参变元积分后，再用一下 Schur 引理，就可得到所需要的结论. 这里不给出详细的证明了.

紧致李群 G 上的一个三角多项式，是指由它的完备标准正交函数系(1.100)中函数的有限线性组合，其全体记为 $T(G)$.

与以上对应地，紧致齐性空间 M 上的一个三角多项式，是它

的完备标准正交函数系(1.107)中函数的有限线性组合,其全体记为$T(M)$.

$T(G)$和$T(M)$的对偶空间分别记为$T(G)^*$和$T(M)^*$. $f\in T(G)^*$的充分必要条件就是将函数系(1.100)中每个函数对应一个确定的数:

$$f: e_{ij}^{\lambda}(x) \to \hat{f}_{ij}^{\lambda}, \quad 1 \leqslant i, j \leqslant d_{\lambda}; \quad \lambda \in \hat{G}.$$

而$f\in T(M)^*$中广义函数的充分必要条件就是将函数系(1.107)中的每个函数都对应一个数:

$$f: e_{ij}^{\lambda}(x) \to \hat{f}_{ij}^{\lambda}, \quad 1 \leqslant i, \ j \leqslant d_{\lambda};$$
$$e_{ij}^{\lambda}(x) \not\equiv 0, \lambda \in \hat{M}.$$

考虑$C^{\infty}(G)$,和$C^{\infty}(M)$的对偶空间$S'(G)$和$S'(M)$,如果用$\bar{\rho}_{\lambda}'$表示函数矩阵$\overline{\rho_{\lambda}(x)}'$,用$\bar{T}_{\lambda}'$表示函数矩阵$\overline{T_{\lambda}(m)}'$,则当$f\in T(G)^*$时,令

$$\hat{f}_{\lambda} = f(\bar{\rho}_{\lambda}'), \quad e_{\lambda}(f) = d_{\lambda}^{\frac{1}{2}} \hat{f}_{\lambda}. \tag{1.113}$$

而$f\in T(M)^*$时,令

$$\hat{f}_{\lambda} = f(\bar{T}_{\lambda}'), \quad e_{\lambda}(f) = d_{\lambda}^{\frac{1}{2}} \hat{f}_{\lambda}. \tag{1.114}$$

若存在正数A和B,使得

$$\mathrm{Tr}(\hat{f}_{\lambda} \bar{\hat{f}}_{\lambda}') \leqslant A|\lambda|^{B}, \tag{1.115}$$

则有 $f\in S'(G)$,或$f\in S'(M)$

成立,其中若简记$(\cdot,\cdot)$为$\mathfrak{g}$上的G不变内积时,有

$$|\lambda| = (\lambda,\lambda)^{\frac{1}{2}},$$

这时,$f\in S'(G)$的广义函数的 Fourier 级数是

$$\begin{aligned} f &\overset{S'}{=\!=} \sum_{\lambda\in\hat{G}} \mathrm{Tr}(e_{\lambda}(f) e_{\lambda}(x)) \\ &\overset{S'}{=\!=} \sum_{\lambda\in\hat{G}} d_{\lambda} \mathrm{Tr}(\hat{f}_{\lambda} \rho_{\lambda}(x)) \\ &\overset{S'}{=\!=} \sum_{\lambda\in\hat{G}} d_{\lambda} \chi_{\lambda} * f. \end{aligned} \tag{1.116}$$

而$f\in S'(M)$的广义函数的 Fourier 级数是

$$
\begin{aligned}
f &\overset{S'}{=\!=} \sum_{\lambda\in\hat{M}} \mathrm{Tr}(e_\lambda(f)e_\lambda(m)) \\
&\overset{S'}{=\!=} \sum_{\lambda\in\hat{M}} d_\lambda \mathrm{Tr}(\hat{f}_\lambda T_\lambda(m)) \\
&\overset{S'}{=\!=} \sum_{\lambda\in\hat{M}} d_\lambda \chi_\lambda * f,
\end{aligned} \tag{1.117}
$$

其中$\overset{S'}{=\!=}$表示在广义函数的意义之下收敛，而 $\chi_\lambda * f$ 是广义函数的卷积.

1.5.4 Laplace 算子与 Casimir 算子

设 G 是一个连通的紧致李群，$\mathfrak{g}$ 是 G 的李代数. 若(ρ,V)是 G 的有限维表示，根据(1.76)式，$(\mathrm{d}\rho,V)$就是 $\mathfrak{g}$ 的表示. G 上左不变向量场全体组成的线性空间 $\chi(G)$关于向量场的方括号积是与 $\mathfrak{g}$ 同构的李代数，从而$(\mathrm{d}\rho,V)$也是 $\chi(G)$的表示，记 $\tilde{X}$ 为 $X\in\mathfrak{g}$ 对应的向量场，则表示为

$$
\mathrm{d}\rho:\chi(G)\to \mathrm{gl}(V),\quad \tilde{X}\to \mathrm{d}\rho(X). \tag{1.118}
$$

记 U 为 G 上所有的左不变微分算子生成的复的幺代数，称为 G 的通用包络代数. 设 $\mathfrak{g}$ 的一组基是 $X_1,X_2,\cdots,X_n$，它们对应了左不变向量场的一组基 $\tilde{X}_1,\tilde{X}_2,\cdots,\tilde{X}_n$，则 U 的一组基是

$$
\{\tilde{X}^m = \tilde{X}_1^{m_1}\tilde{X}_2^{m_2}\cdots\tilde{X}_n^{m_n}, m\in \mathbf{Z}_+^n\} \tag{1.119}
$$

G 上任意一个左不变微分算子 $S\in U$，经过向量场的方括号积交换下标的顺序后，就可表成(1.119)中基的一个有限的复线性组合. 于是 G 的表示(ρ,V)的微分$(\mathrm{d}\rho,V)$就给出了通用包络代数 U 的一个表示，它将

$$
S = \tilde{X}\tilde{Y}\cdots\tilde{W}
$$

表示成

$$
\mathrm{d}\rho(S) = \rho(X)\rho(Y)\cdots\rho(W). \tag{1.120}
$$

特别将(1.119)式中的基中每个基向量表示成

$$
\mathrm{d}\rho(\tilde{X}^m) = \rho(X_1)^{m_1}\rho(X_2)^{m_2}\cdots\rho(X_n)^{m_n}. \tag{1.121}
$$

在(1.119)中，$\mathbf{Z}_+^n$ 表示 $\mathbf{R}^n$ 中的非负整格点集.

通用包络代数的表示有着更深刻的调和分析的背景，对紧致

李群来说，它反映了函数的导数的 Fourier 系数与函数本身的 Fourier 系数之间的联系.

引理 1.23 设 $\widetilde{X}$ 是 $X\in\mathfrak{g}$ 对应的 G 上的左不变向量场，若 $f\in L(G)$ 且 $\widetilde{X}f\in L(G)$，则对一切的 $\lambda\in\widehat{G}$，以下等式恒成立：

$$(\widetilde{X}f)^{\wedge}_{\lambda}=\mathrm{d}\rho_{\lambda}(X)\,\hat{f}_{\lambda}.$$

更进一步，若 $f\in C^{\infty}(G)$，则对任意的 $S\in U$，有

$$(Sf)^{\wedge}_{\lambda}=\mathrm{d}\rho_{\lambda}(S)\,\hat{f}_{\lambda} \tag{1.122}$$

成立. 其中 $\mathrm{d}\rho_{\lambda}(S)$ 由(1.120)式定义.

而若 $f\in S'(G)$ 时，Sf 仍是 $C^{\infty}(G)$ 上的广义函数，即 $Sf\in S'(G)$，这时(1.122)式仍然成立.

证明 由(1.101)式得

$$\begin{aligned}(\widetilde{X}f)^{\wedge}_{\lambda}&=\int_G(\widetilde{X}f)(x)\rho_{\lambda}(x^{-1})\mathrm{d}x\\&=\int_G\lim_{t\to0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(x\exp tX)\rho_{\lambda}(x^{-1})\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

因为 f 具有 L^1 导数，从而上式等于

$$\begin{aligned}(\widetilde{X}f)^{\wedge}_{\lambda}&=\lim_{t\to0}\int_G\frac{1}{t}(f(x\exp tX)-f(x))\rho_{\lambda}(x^{-1})\mathrm{d}x\\&=\lim_{t\to0}\frac{1}{t}\left\{\int_G f(x\exp tX)\rho_{\lambda}(x^{-1})\mathrm{d}x\right.\\&\qquad\left.-\int_G f(x)\rho_{\lambda}(x^{-1})\mathrm{d}x\right\}.\end{aligned}$$

对上面第二个等号右端的第一个积分作变元置换，再与第二个积分合并，得

$$\begin{aligned}(\widetilde{X}f)^{\wedge}_{\lambda}&=\lim_{t\to0}\frac{1}{t}\int_G f(x)(\rho_{\lambda}(\exp tX)\\&\qquad-\rho_{\lambda}(e))\rho_{\lambda}(x^{-1})\mathrm{d}x\\&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\rho_{\lambda}(\exp tX)\Big|_{t=0}\hat{f}_{\lambda}\\&=\mathrm{d}\rho_{\lambda}(X)\,\hat{f}_{\lambda}.\end{aligned}$$

再用上述结果归纳证明以及广义函数求导的定义，就得到(1.122)

对于 C^∞ 函数与广义函数均成立.

半单李代数 $\mathfrak{g}$ 的 Casimir 算子是这样定义的:设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一组基,$B(\cdot,\cdot)$ 是 Killing 型,令

$$g_{ij} = B(X_i, X_j) = \mathrm{Tr}\,\mathrm{ad}X_i \mathrm{ad}X_j,$$

$$(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}.$$

若 ρ 是 $\mathfrak{g}$ 的表示,称

$$\rho(G) = \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}\rho(X_i)\rho(X_j) \tag{1.123}$$

为 $\mathfrak{g}$ 的关于表示 ρ 的 Casimir 算子,则有如下命题:

命题 1.19　设 ρ 是半单李代数 $\mathfrak{g}$ 的一个表示,$\rho(G)$ 是 Casimir 算子,则对任意一个 $X \in \mathfrak{g}$,有下式恒成立:

$$\rho(G)\rho(X) = \rho(X)\rho(G).$$

特别是若 ρ 不可约时,$\rho(G)$ 就是恒等算子的常数倍.

证明　记

$$[X_i, X_j] = \sum_{k=1}^{n} C_{ij}^k X_k,$$

则称 $\{C_{ij}^k, 1 \leqslant i,j,k \leqslant n\}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的*结构常数*. 由换位运算的性质,首先有 $C_{ij}^k = -C_{ji}^k$,而由 Jocobi 等式,又有

$$\sum_{s=1}^{n} (C_{ij}^s C_{sk}^l + C_{jk}^s C_{si}^l + C_{ki}^s C_{sj}^l) = 0, \tag{1.124}$$

$$1 \leqslant i,j,k,l \leqslant n.$$

显然,命题的证明等价于证明 $[\rho(G), \rho(X_k)] = 0$ 对 $k = 1, 2, \cdots, n$ 均成立,其中 $[\cdot,\cdot]$ 表示矩阵的方括号积. 现由

$$\begin{aligned}
&[\rho(G), \rho(X_k)] \\
&= \sum_{i,j} g^{ij}[\rho(X_i)\rho(X_j), \rho(X_k)] \\
&= \sum_{i,j} g^{ij}(\rho(X_i)\rho(X_j)\rho(X_k) - \rho(X_k)\rho(X_i)\rho(X_j)) \\
&= \sum_{i,j} g^{ij}\{\rho(X_i)[\rho(X_j), \rho(X_k)] + [\rho(X_i), \rho(X_k)]\rho(X_j)\} \\
&= \sum_{i,j} g^{ij}\{\rho(X_i)\sum_r C_{jk}^r \rho(X_r) + \sum_r C_{ik}^r \rho(X_r)\rho(X_j)\}
\end{aligned}$$

$$= \sum_{i,j,r}\rho(X_i)\rho(X_j)\{g^{ir}C^j_{rk} + g^{rj}C^i_{rk}\},$$

如能证明对固定的 k，$\left(\sum_r g^{ir}C^j_{rk}\right)$ 是反对称阵，则可得出$[\rho(G),\rho(X_k)]=0$. 注意到

$$a\mathrm{d}X_i = (C^j_{ik}),\quad g_{ij} = \sum_{a,b}C^a_{ib}C^b_{ja},$$

且(g_{ij})是对称阵，所以只需证明

$$(g_{pq})\left(\sum_r g^{ir}C^j_{rk}\right)(g_{ab}) \equiv (A_{pb})$$

是反对称阵. 但矩阵的系数是

$$\begin{aligned}A_{pb} &= \sum_{i,j}g_{pi}\sum_r g^{ir}C^j_{rk}g_{jb}\\ &= \sum_j C^j_{kp}g_{jb}\\ &= \sum_{j,r,s}C^j_{kp}C^r_{js}C^s_{br},\end{aligned}$$

对和中的每项前两个因子用(1.124)式代换，得

$$\begin{aligned}\sum_{j,r,s}C^j_{kp}C^r_{js}C^s_{br} &= -\sum_{j,r,s}C^j_{ps}C^r_{jk}C^s_{br} - \sum_{j,r,s}C^j_{sk}C^r_{jp}C^s_{br}\\ &= \sum_{j,r,s}C^j_{ps}C^r_{kj}C^s_{br} + \sum_{j,r,s}C^j_{sk}C^r_{jp}C^s_{rb}.\end{aligned}$$

上式最后等号的右端之和在 (p,k,b) 的轮换下不变，即 $\sum_j C^j_{kp}g_{jb}$在(p,k,b)轮换下不变，但对于 k、p 它是反对称的，从而对于 p、b 它必然也是反对称的，即(A_{pb})是反对称阵. 这就证明了：对任意的 $k=1,2,\cdots,n$，矩阵 $\left(\sum_r g^{ir}C^j_{rk}\right)$ 是反对称阵，这也就证明了$\rho(G)$的交换性. 最后由 Schur 引理知，当 ρ 不可约时，必有 $\rho(G)$ 是数量阵. ▌

将引理 1.23 中的C^∞函数类换成紧致支集的C^∞函数类时，引理 1.23 对非紧致李群仍然成立. 所以对于紧致或非紧致的半单李群，Casimir 算子都是一个二阶左不变微分算子的表示. 对紧致半

单李群，因为它的 Killing 型定负，它的 Casimir 算子 $\rho(G)$ 与 Laplace 算子的表示 $\rho(\Delta)$ 的关系就是

$$\rho(\Delta) = -\rho(G). \tag{1.125}$$

而对非紧致的实半单李群，它的 Killing 型在紧的部分为定负，在非紧致部分为定正. 所以若用 Δ 表示非紧致实半单李群的 Laplace 算子，用 Δ_k 表示它的极大紧致子群上的 Laplace 算子，用 $\rho(G)$ 表示 Casimir 算子，就有

$$\rho(G) = \rho(\Delta) - 2\rho(\Delta_k)$$

是一个双曲型左不变微分算子的表示.

当 $\mathfrak{g}$ 为紧致李代数时，$\mathfrak{g}=z+\mathfrak{g}'$，$z$ 是 $\mathfrak{g}$ 的中心，$\mathfrak{g}'$ 是半单紧致李代数. 因为总可取到 $\mathfrak{g}$ 上的 G 不变内积 $(\cdot,\cdot)$ 与 $\mathfrak{g}'$ 的 Killing 型是相容的，即 $(\cdot,\cdot)$ 限制在 $\mathfrak{g}'$ 上就是 $\mathfrak{g}'$ 的 Killing 型，这时取 $X_1,\cdots,X_n$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一组基，令

$$g_{ij} = -(X_i,X_j), \quad (g^{ij}) = (g_{ij})^{-1},$$

则仍可定义

$$\rho(G) = \sum_{i,j} g^{ij}\rho(X_i)\rho(X_j) \tag{1.126}$$

为 $\mathfrak{g}$ 关于表示 ρ 的 Casimir 算子.

因为 $\rho(z)$ 可与 $\rho(\mathfrak{g})$ 交换，$\rho(\mathfrak{g})$ 与 $\rho(\mathfrak{g}')$ 的可约性或不可约性是等价的，所以由(1.126)式定义的紧致李代数表示的 Casimir 算子，使命题 1.19 仍然成立，且(1.125)式也成立. 由此得如下命题：

命题 1.20 紧致李群的不可约酉表示的矩阵系数 $u_{ij}^{\lambda}(x)$ 都是它的 Laplace 算子的特征函数. 更准确地，对每个 $\lambda\in\widehat{G}$，ρ_λ 是 G 的以 λ 为最高权的不可约酉表示，则有

$$\Delta\rho_\lambda(x) = -\mu_\lambda\rho_\lambda(x) \tag{1.127}$$

成立. 其中

$$\begin{aligned}\mu_\lambda &= (\lambda+\delta,\lambda+\delta) - (\delta,\delta) \\ &= |\lambda+\delta|^2 - |\delta|^2,\end{aligned} \tag{1.128}$$

而 δ 是 G 的李代数 $\mathfrak{g}$ 的全体正根之和的一半.

由命题 1.20 可导出紧致齐性空间上的 Laplace-Beltrami 算

子的性质如下：

命题 1.21 设 M 为连通的紧致齐性空间，Δ 是 M 的 Laplace-Beltrami 算子，则 $L^2(M)$ 的完备标准正交函数系(1.107)中每一个函数都是 M 的 Laplace 算子 Δ 的特征函数，更具体地，对每个 $\lambda\in\widehat{M}$，$T_\lambda(m)$ 由(1.106)式给出，则有

$$\Delta T_\lambda(m)=-\mu_\lambda T_\lambda(m),$$

其中

$$\mu_\lambda=(\lambda+\delta,\lambda+\delta)-(\delta,\delta)\equiv|\lambda+\delta|^2-|\delta|^2,$$

$(\cdot,\cdot)$是 M 上的等度量变换群含幺元的连通分支，即紧致李群 G 的李代数 $\mathfrak{g}$ 上的 G 不变内积$(\cdot,\cdot)$，在 M 上 o 点的切空间 $T_o(M)=\mathfrak{p}$ 上的限制，δ 是 $\mathfrak{g}$ 的全体正根之和的一半.

证明命题 1.21，只需在 $\mathfrak{p}$ 上取关于$(\cdot,\cdot)$的一组标准正交基 $X_1,\cdots,X_s$，将它扩充为 $\mathfrak{g}$ 的一组标准正交基 $X_1,\cdots,X_n$，其中 $X_{s+1},\cdots,X_n$ 是 $\mathfrak{k}$ 的关于$(\cdot,\cdot)$的标准正交基. 由引理 1.4 知

$$\Delta=\sum_{i=1}^n\widetilde{X}_i^2$$

就是 G 的 Laplace 算子. 而由命题 1.20 知

$$\Delta\rho_\lambda(p(m))I_\lambda=-\mu_\lambda\rho_\lambda(p(m))I_\lambda.$$

但由引理 1.4 的证明中的结果知

$$\begin{aligned}\Delta\rho_\lambda(p(m))I_\lambda&=\sum_{j=1}^n\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^2\rho_\lambda(p(m)\exp tX_j)I_\lambda\Big|_{t=0}\\&=\sum_{j=1}^n\rho_\lambda(p(m))\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^2\rho_\lambda(\exp tX_j)I_\lambda\Big|_{t=0}.\end{aligned}$$

由于 $\rho_\lambda(k)I_\lambda=I_\lambda$，从而上式等于

$$\Delta\rho_\lambda(p(m))I_\lambda=\sum_{j=1}^s\rho_\lambda(p(m))\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^2\rho_\lambda(\exp tX_j)I_\lambda\Big|_{t=0}.$$

由引理 1.7，设 Δ_M 是 M 的 Laplace-Beltrami 算子，就得到

$$\begin{aligned}\Delta\rho_\lambda(p(m))I_\lambda&=\Delta_M\rho_\lambda(p(m))I_\lambda\\&=\Delta_MT_\lambda(m),\end{aligned}$$

即得到对任意的 $\lambda\in\widehat{M}$，有

$$\Delta_M T_\lambda(m) = -\mu_\lambda T_\lambda(m)$$

成立. ∎

1.5.5 Peter-Weyl 定理

Peter-Weyl 定理是说:紧致李群 G 上由(1.100)式给出的函数系是 $L^2(G)$的完备正交函数系,即 $L^2(G)$中任意一个函数可用该函数系中函数的有限线性组合按 L^2 模来逼近.特别是,G 上的任意一个连续函数可用该函数系中的有限线性组合一致地逼近.

而函数系(1.100)和(1.107)的完备性的精确叙述就是以下的 Plancherel 公式.

引理 1.24 设 G 是一个连通紧致李群,$f\in L^2(G)$的 Fourier 级数是

$$f(x) \sim \sum_{\lambda\in\hat{G}} d_\lambda \mathrm{Tr}(\hat{f}_\lambda \rho_\lambda(x)),$$

则对一切 $f\in L^2(G)$,有以下等式成立:

$$\| f \|_2 = \left(\sum_{\lambda\in\hat{G}} d_\lambda \mathrm{Tr}(\hat{f}_\lambda \overline{\hat{f}}'_\lambda)\right)^{\frac{1}{2}},$$

其中

$$\| f \|_2 = \left(\int_G |f(x)|^2 \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}},$$

$\mathrm{d}x$ 是 G 上的规格化 Haar 测度.

当 G 非连通时,设 G_0 是 G 的含幺元的连通分支,则 G 上的函数限制在 G 的任意一个连通分支的部分上,都等于 G_0 上的某个函数,所以引理 1.24 对非连通的紧致李群是依然成立的.

对紧致齐性空间来说,有类似性质:

引理 1.25 设 M 是连通的紧致齐性空间,$f\in L^2(M)$的 Fourier 级数是

$$f(m) \sim \sum_{\lambda\in\hat{M}} d_\lambda \mathrm{Tr}(\hat{f}_\lambda T_\lambda(m)),$$

则对一切 $f\in L^2(M)$,有以下等式成立:

$$\| f \|_2^2 = \sum_{\lambda\in\hat{M}} d_\lambda \mathrm{Tr}(\hat{f}_\lambda \overline{\hat{f}}'_\lambda),$$

其中

$$\|f\|_2^2 = \int_M |f(m)|^2 \mathrm{d}m,$$

$\mathrm{d}m$ 是 M 上的规格化的 G 不变测度.

Peter-Weyl 定理近代的叙述是这样的：对于 $f \in L^2(G)$，令

$$f^\vee(x) = f(x^{-1}),$$

则显然有

(a) $\|f\| = \|f^\vee\|$，因此 $f \to f^\vee$ 是 $L^2(G)$ 到 $L^2(G)$ 上的等距同构.

(b) $f^\vee$ 的 Fourier 系数是

$$\begin{aligned}(f^\vee)^\wedge_\lambda &= \int_G f^\vee(x)\rho_\lambda(x^{-1})\mathrm{d}x \\ &= \int_G f(x^{-1})\rho_\lambda(x^{-1})\mathrm{d}x \\ &= \int_G f(x)\rho_\lambda(x)\mathrm{d}x. \\ &= \overline{\left(\int_G \overline{f(x)}\rho_\lambda(x^{-1})\mathrm{d}x\right)'}\end{aligned}$$

$\int_G f(x)\rho_\lambda(x)\mathrm{d}x = \rho_\lambda(f)$ 称为 f 的表示矩阵，则由引理 1.24，有

$$\|f\|_2 = \|f^\vee\|_2 = \sum_{\lambda\in\hat{G}} d_\lambda \mathrm{Tr}(\rho_\lambda(f)\overline{\rho_\lambda(f)}').$$

记 $(\rho_\lambda, V_\lambda)$ 为 G 的以 λ 为最高权的不可约酉表示，并用 $\mathrm{Hom}(V_\lambda, V_\lambda)$ 表示 V_λ 到自身的线性同态（线性映射）的全体所构成的线性空间：

$$\rho_\lambda(f) \in \mathrm{Hom}(V_\lambda, V_\lambda),$$

将所有 $\lambda\in\hat{G}$ 对应的线性空间首先写成代数直和

$$\bigoplus_{\lambda\in\hat{G}} \mathrm{Hom}(V_\lambda, V_\lambda), \tag{1.129}$$

则当 f 是 G 上的三角多项式时，$\rho_\lambda(f)\neq 0$ 只有有限个，而 $\{\rho_\lambda(f), \lambda\in\hat{G}\}$ 就是空间(1.129)中的一点，反之，空间(1.129)中的一点必为某个 G 上的三角多项式的 Fourier 系数. 赋予空间(1.129)一个

Hilbert 空间的范数

$$\sum_{\lambda\in\hat{G}} d_\lambda \mathrm{Tr}(\rho_\lambda(f)\,\overline{\rho_\lambda(f)}')$$

后，空间(1.129)按上述范数完备化，就得到一个完备的 Hilbert 空间，并记为

$$\hat{\bigoplus_{\lambda\in\hat{G}}} \mathrm{Hom}(V_\lambda, V_\lambda). \tag{1.130}$$

而每个 $f\in L^2(G)$就对应着空间(1.130)中的一点：

$$\{\rho_\lambda(f), \lambda\in\hat{G}\} \in \hat{\bigoplus_{\lambda\in\hat{G}}} \mathrm{Hom}(V_\lambda, V_\lambda).$$

这个对应由前面的证明，是 $L^2(G)$到 $\hat{\bigoplus}_{\lambda\in\hat{G}}\mathrm{Hom}(V_\lambda,V_\lambda)$上的等距同构，即

$$L^2(G)\cong \hat{\bigoplus_{\lambda\in\hat{G}}} \mathrm{Hom}(V_\lambda, V_\lambda).$$

再用对偶空间的概念，记 V_λ^* 是 V_λ 上复线性函数全体所构成的线性空间，设 $e_1, e_2, \cdots, e_{d_\lambda}$是 V 的一组基，$f_1, f_2, \cdots, f_{d_\lambda}$是它的对偶基，即它是 V_λ^* 的一组基，且适合

$$f_i(e_j) = \delta_{ij},$$

其中 $\delta_{ii}=1\quad(i=1,2,\cdots,d_\lambda)$； $\delta_{ij}=0$，若 $i\neq j$ 且 $1\leqslant i,\ j\leqslant d_\lambda$. 则 $V_\lambda\otimes V_\lambda^*$ 就是两空间中元素的张量积全体张成的复线性空间，它的基是

$$\{e_i\otimes f_j,\ 1\leqslant i,j\leqslant d_\lambda\}.$$

$V_\lambda\otimes V_\lambda^*$ 中的张量在 V_λ 上的作用是 V_λ 到自身的线性映射，例如对于 $x\in V_\lambda$，$e_i\otimes f_j$ 就将 x 变成了

$$e_i\otimes f_j(x) = f_j(x)e_i,$$

式中 $f_j(x)$是一个复数. 这就容易验证

$$V_\lambda\otimes V_\lambda^* \cong \mathrm{Hom}(V_\lambda, V_\lambda).$$

从而得到

$$\begin{aligned} L^2(G) &\cong \hat{\bigoplus_{\lambda\in\hat{G}}} V_\lambda\otimes V_\lambda^* \\ &\cong \hat{\bigoplus_{\lambda\in\hat{G}}} \mathrm{Hom}(V_\lambda, V_\lambda). \end{aligned} \tag{1.131}$$

这就是 Peter-Weyl 定理的近代表述方式.

§1.6 Abel—龚核、Poisson 核与热核

在酉群上的调和分析研究中,龚昇教授建立了一系列的思想概念和方法,其中在酉群上的 Fourier 级数的球求和的研究中建立了两类重要的球求和核,即 Abel—龚核与 Riesz—龚核,定义了酉群上 Fourier 级数的 Abel—龚求和以及 Riesz—龚求和.进一步得到了上述求和的积分表达式,建立了运用 Cartan 子代数上的 Fourier 变换进行研究群的调和分析的基本方法.在求和核的积分表示中,他首先发现和运用了 Cartan 子代数上 Weyl 群反对称的微分算子

$$D=\prod_{\alpha>0}D_\alpha$$

将酉群和典型群上的 Abel—龚核和 Riesz—龚核等核函数用已知函数清楚明白地表示出来,并将微分算子 D 也具体写了出来.关于 Abel—龚核和 Riesz—龚核等更重要的作用,在下面两小节中叙述.

1.6.1 Abel—龚核、Poisson 核与热核

紧致李群 G 上的 Abel—龚核定义如下:

$$A_t(x)=\sum_{\lambda\in\hat{G}}\mathrm{e}^{-t|\lambda+\delta|}d_\lambda\chi_\lambda(x),\tag{1.132}$$

其中 $0<t<+\infty$,$x\in G$,$\hat{G}$是 G 的酉对偶.由(1.47)式定义的 $\mathfrak{g}$ 上的 G 不变内积 $B(\cdot,\cdot)$,从本节开始我们简记为$(\cdot,\cdot)$,δ 是 G 的李代数 $\mathfrak{g}$ 的全体正根之和的一半,$|\lambda+\delta|=(\lambda+\delta,\lambda+\delta)^{\frac{1}{2}}$,$\chi_\lambda(x)$是 G 的以 λ 为最高权的不可约酉表示 $\rho_\lambda(x)$的特征,d_λ 是表示 $\rho_\lambda(x)$的维数.

记 $L^p(G)$为 G 上 p 方可积($p\geqslant 1$)函数全体所构成的空间,$S'(G)$为§1.5 中定义的 $C^\infty(G)$上的广义函数空间.

设 $f\in L^p(G)$或者 $f\in S'(G)$,f 的 Fourier 级数是

$$f(x) \sim \sum_{\lambda\in\hat{G}} d_\lambda \mathrm{Tr}(\hat{f}_\lambda \rho_\lambda(x)),$$

则 f 的 Fourier 级数的 Abel—龚求和是

$$\begin{aligned} S_t^A(f,x) &= A_t * f(x) \\ &= \sum_{\lambda\in\hat{G}} \mathrm{e}^{-t|\lambda+\delta|} d_\lambda \mathrm{Tr}(\hat{f}_\lambda \rho_\lambda(x)), \end{aligned} \tag{1.133}$$

且无论对于 $f\in L^p(G)$ 或 $f\in S'(G)$，(1.133)式右端的级数绝对一致收敛，且可以逐项求导. 也就是说，只要 $t>0$，这个级数就是 G 上的 C^∞ 函数的 Fourier 级数.

紧致李群上广义的 Abel—龚核定义为

$$A_t^b(x) = \sum_{\lambda\in\hat{G}} \mathrm{e}^{-t|\lambda+\delta|^b} d_\lambda \chi_\lambda(x), \tag{1.134}$$

其中 $b>0$，特别当 $b=2$ 时，称核

$$A_t^2(x) \tag{1.135}$$

为 Gauss—龚核.

紧致李群上的 Abel—龚核和 Gauss—龚核已经十分具体且清楚地用已知的函数表示出来，其他广义的 Abel—龚核的性质也十分清楚.

紧致李群上的 Poisson 核是

$$P_t(x) = \sum_{\lambda\in\hat{G}} \mathrm{e}^{-t\sqrt{\mu_\lambda}} d_\lambda \chi_\lambda(x), \tag{1.136}$$

紧致李群上的热核是

$$H_t(x) = \sum_{\lambda\in\hat{G}} \mathrm{e}^{-t\mu_\lambda} d_\lambda \chi_\lambda(x), \tag{1.137}$$

其中 $-\mu_\lambda$ 是 G 的 Laplace-Beltrami 算子的特征值，其详述可见命题 1.20.

易见紧致李群上的热核与 Gauss—龚核的关系是

$$H_t(x) = \mathrm{e}^{-t|\delta|^2} A_t^2(x), \tag{1.138}$$

因为 Gauss—龚核已经完全清楚，它的函数表达式也十分清晰，因此紧致李群上的热核也就完全清楚了.

考虑流形 $M=(0,+\infty)\times G$，则可知，热核是以下热方程的基

本解：

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-\Delta\right)F=0, \tag{1.139}$$

其中 Δ 是 G 上的 Laplace-Beltrami 算子.

而 Poisson 核则是以下 Laplace 方程的基本解：

$$\left(\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^2+\Delta\right)F=0. \tag{1.140}$$

Abel—龚核是以下方程的基本解：

$$\left(\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^2+\Delta-|\delta|^2 I\right)F=0, \tag{1.141}$$

其中 I 是恒等算子.

Gauss—龚核则是以下方程的基本解：

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-\Delta+|\delta|^2 I\right)F=0. \tag{1.142}$$

紧致李群上的 Poisson 核比较复杂，不易直接研究它.

Abel—龚核的重要意义还在于 Poisson 核可以用它表示出来，即

$$\begin{aligned}P_t(x)= A_t(x)(1&+tf_1(x)+t^2f_2(x)+\cdots\\&+t^n f_n(t,x)),\end{aligned} \tag{1.143}$$

其中函数 $f_1(x),\cdots,f_n(t,x)$ 均为已知的性质较好的函数. 通过对 Abel—龚核的研究，就解决了紧致李群上与 Poisson 核有关的种种问题.

以下讨论紧致齐性空间：

对紧致齐性空间 M，与其对应的 $G,K,\mathfrak{g},\mathfrak{p}$ 及 $o\in M$ 如同 1.3.3小节所述，$\mathfrak{p}$ 上的 K 不变内积$(\cdot,\cdot)$就是 $\mathfrak{g}$ 的 G 不变内积在 $\mathfrak{p}$ 上的限制，其 Fourier 级数的各种记号与§1.5 中的(1.104)式及其后各式相同.

紧致齐性空间 M 上的广义 Abel—龚核定义为

$$A_t^b(m)=\sum_{\lambda\in\hat{M}}\mathrm{e}^{-t|\lambda+\delta|^b}d_\lambda\chi_\lambda(m), \tag{1.144}$$

特别当 $b=1$ 时，简记为

$$A_t(m)$$

称为 Abel—龚核. 而当 $b=2$ 时,$A_t^2(m)$称为 Gauss—龚核.

M 上的可积函数或广义函数 f 的 Fourier 级数的 Abel—龚求和则为

$$S_t^{A,b}(f,x) = A_t^b * f(x) = \sum_{\lambda\in\hat{M}} e^{-t|\lambda+\delta|^b} d_\lambda \mathrm{Tr}(\hat{f}_\lambda T_\lambda(m)). \tag{1.145}$$

紧致齐性空间上的 Poisson 核是

$$P_t(m) = \sum_{\lambda\in\hat{M}} e^{-t\sqrt{\mu_\lambda}} d_\lambda \chi_\lambda(m). \tag{1.146}$$

紧致齐性空间上的热核是

$$H_t(m) = \sum_{\lambda\in\hat{M}} e^{-t\mu_\lambda} d_\lambda \chi_\lambda(m). \tag{1.147}$$

通常在紧致齐性空间上,例如 R^n 中的单位球面上,它们的热核与 Poisson 核是不能用紧致齐性空间上的函数表示的,而要表示成

$$P_t(n,m), \quad H_t(n,m) \tag{1.148}$$

的形式. 但我们充分运用了紧致齐性空间上的等度量变换群 G,并建立了卷积,从而对紧致齐性空间上的热核与 Poisson 核就看得更清楚了.

考虑流形 $N=(0,\infty)\times M$,则热核就是热方程的基本解, Poisson 核就是 Laplace 方程的基本解,其中取 Δ 为 M 上的 Laplace—Beltrami 算子. 则

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 + \Delta, \ \frac{\partial}{\partial t} - \Delta$$

是相应的 Laplace 算子和热算子.

紧致齐性空间上的 Gauss—龚核与热核之间的关系、Abel—龚核与 Poisson 核之间的关系,同紧致李群上的完全相同,这里就不赘述了.

1.6.2 Riesz—龚核与 Dirichlet—龚核

定义 $t\geqslant 0$ 上的函数

$$(1-t^a)_+^\delta=\begin{cases}0,\text{若 } t\geqslant 1;\\(1-t^a)^\delta,\text{若 } 0\leqslant t\leqslant 1,\end{cases}\tag{1.149}$$

其中，$\mathrm{Re}a>0$，$\mathrm{Re}\delta>0$.

则紧致李群 G 上的 Riesz－龚核定义为

$$K_t^\delta(x)=\sum_{\lambda\in\hat{G}}(1-t^2|\lambda+\delta|^2)_+^\delta\, d_\lambda\chi_\lambda(x),\tag{1.150}$$

其中 $\mathrm{Re}\delta>0$，实际上它是 G 上的有限三角多项式.

紧致李群上广义的 Riesz－龚核则定义为

$$K_t^{a,\delta}(x)=\sum_{\lambda\in\hat{G}}(1-t^a|\lambda+\delta|^a)_+^\delta\, d_\lambda\chi_\lambda(x),\tag{1.151}$$

其中 $\mathrm{Re}a>0$，$\mathrm{Re}\delta>0$.

若 $f\in L^p(G)$ 或 $f\in S'(G)$，则其 Fourier 级数的广义的 Riesz－龚平均是

$$\begin{aligned}S_t^{a,\delta}(f,x)&=K_t^{a,\delta}*f(x)\\&=\sum_{\lambda\in\hat{G}}(1-t^a|\lambda+\delta|^a)^\delta d_\lambda\mathrm{Tr}(\hat{f}_\lambda\rho_\lambda(x)).\end{aligned}\tag{1.152}$$

紧致齐性空间 M 上广义的 Riesz－龚核则定义为

$$K_t^{a,\delta}(m)=\sum_{\lambda\in\hat{M}}(1-t^a|\lambda+\delta|^a)_+^\delta\, d_\lambda\chi_\lambda(m).\tag{1.153}$$

紧致齐性空间上的函数 $f\in L^p(M)$ 或者 $f\in S'(M)$ 的广义的 Riesz－龚平均则是

$$\begin{aligned}S_t^{a,\delta}(f,m)&=K_t^{a,\delta}*f(m)\\&=\sum_{\lambda\in\hat{M}}(1-t^a|\lambda+\delta|^a)_+^\delta\, d_\lambda\mathrm{Tr}(\hat{f}_\lambda T_\lambda(m)).\end{aligned}\tag{1.154}$$

Riesz 平均和广义 Riesz 平均在经典调和分析中的重要性是众所周知的. 在紧致李群和紧致齐性空间上，它们还有一个重要的作用，是研究紧致李群和紧致齐性空间上的逼近论问题的最主要的工具. 用广义的 Riesz－龚平均可以解决紧致李群和紧致齐性空间上逼近论中若干个最主要的课题.

对紧致李群和紧致齐性空间上的调和分析来说，一个极端重

要的基本问题是关于 Fourier 级数的部分和的研究. 在酉群上, Fourier 级数方体部分和的核已由龚昇清楚、具体的将它表示出来了, 这个核称为 Dirichlet－龚核, 酉群上的 Dirichlet－龚核恰好可用一维经典的 Dirichlet 核表示.

在紧致李群上, 若在 Cartan 子代数 $\mathfrak{h}$ 的对偶空间 $\mathfrak{h}^*$ 上取一个标准的正方体 R, 并记

$$R_N = NR$$

是 R 关于原点的伸缩, 则紧致李群上的 Dirichlet－龚核就定义为

$$D_N(x) = \sum_{\lambda+\delta\in(\widehat{G}+\delta)\cap R_N} d_\lambda \chi_\lambda(x), \tag{1.155}$$

而紧致李群上的 Fourier 级数的 Dirichlet－龚部分和(或简称为方体部分和)则是

$$\begin{aligned} S_N(f,x) &= D_N * f(x) \\ &= \sum_{\lambda+\delta\in(\widehat{G}+\delta)\cap R_N} d_\lambda \mathrm{Tr}(\hat{f}_\lambda \rho_\lambda(x)). \end{aligned} \tag{1.156}$$

复半单李代数有四大类和五个例外, 分别记之为:

$$A_n, B_n, C_n, D_n, G_2, F_4, E_6, E_7, E_8, \tag{1.157}$$

其中下标表示 Cartan 子代数的维数, 当 n 很小时, A_n, B_n, C_n, D_n 之间有某些同构存在, 如 $A_1 \cong B_1$.

四类典型复半单李代数所对应的典型紧致李群分别是: A_n 对应 SU_{n+1}; B_n 对应 $SO(2n+1)$; C_n 对应酉辛群 $USP(2n)$; D_n 对应 $SO(2n)$. 其中

$$SU_{n+1} = \{X \in U_{n+1}, \det X = 1\},$$
$$USP(2n) = \{X \in U_{2n}, X'J_nX = J_n\},$$

其中

$$J_n = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix},$$

I_n 是 n 阶单位矩阵.

而酉群 U_n 则是典型的非半单的紧致李群.

对 $U_n, SU_n, SO(n), USP(2n)$ 和 G_2 对应的紧致李群, 它们的

Dirichlet－龚核的具体的函数表达式已经得到了. 紧致李群上的 Dirichlet－龚核的 Lebesgue 常数的精确估计也已经得到了. 但是紧致李群上 Fourier 级数的 Dirichlet－龚部分和的许多基本性质至今却尚未解决，例如当 $1\leqslant p<2$，$f\in L^p(G)$时，f 的 Dirichlet－龚部分和是否在 L^p 意义下收敛于 f？当 $f\in L^2(G)$时，f 的 Fourier 级数的 Dirichlet－龚部分和是否几乎处处收敛于 f？均是尚未解决的课题.

第 2 章

紧致李群上的调和分析

§2.1 紧致李群上的 Fourier 系数的渐近性质

2.1.1 经典的 Riemann-Lebesgue 定理

在经典的 Fourier 分析理论中，设 $T=[0,2\pi)$，$f\in L^p(T)$，$1\leqslant p\leqslant+\infty$，或 $f\in C(T)$，即以 2π 为周期的连续函数空间，f 的关于 $L^2(T)$ 的完备标准正交函数系 $\{e^{in\theta},n\in\mathbf{Z}\}$ 的 Fourier 系数是

$$c_n(f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\theta)e^{-in\theta}d\theta,$$

而 f 的 Fourier 级数是

$$f(\theta)\sim\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n(f)e^{in\theta},$$

则关于 Fourier 系数存在着熟知的 Riemann-Lebesgue 定理，它的主要内容是：

(a) 对任意的 $f\in L^p(T)$ 及任意的 $1\leqslant p\leqslant+\infty$，有

$$\lim_{|n|\to+\infty}|c_n(f)|=0$$

恒成立；

(b) 上述 Fourier 系数的这一性质，对整个函数类 L^p 来说，不可能再改进了，也就是说，对任意给定的 $\{\varepsilon_n>0,n\in\mathbf{Z}\}$，其中 $\mathbf{Z}$ 表示整数集，适合

$$\lim_{|n|\to+\infty}\varepsilon_n=0,$$

则必然存在一个 $f\in L^p(G)$，使得

$$\overline{\lim_{|n|\to+\infty}}|c_n(f)|/\varepsilon_n=1,\tag{2.1}$$

特别可找到 $f\in C(T)$，则 f 属于任意一个 $L^p(T)$，$1\leqslant p\leqslant+\infty$，使得(2.1)式仍然成立.

同样，对于多重的 Fourier 级数，关于它的 Fourier 系数，Riemann-Lebesgue 定理也仍然正确.

以 2π 为周期的函数的 Fourier 级数就是 1 维环群 T^1 上的函数的 Fourier 级数，而 n 重的 Fourier 级数就是 n 维环群 T^n 上的函数的 Fourier 级数. T^1 和 T^n 都是交换的紧致李群，一个自然的问题是，对于一般的紧致李群，即对于非交换的紧致李群，上述的关于 Fourier 系数的定理是否还成立的问题. 这将在下一节中给出完整的回答.

2.1.2 主要的定理

与经典的情形不同，非交换的紧致李群 G 上可积函数的 Fourier 系数的渐近性质呈现出极为复杂的状况. 粗略地说，只有当 $f\in L^2(G)$ 时，关于 Fourier 系数的经典的 Riemann-Lebesgue 定理仍然成立. 而当 $1\leqslant p<2$ 时，经典的 Riemann-Lebesgue 定理已不成立，且必有 $f\in L^p(G)$，它的 Fourier 系数发散于无穷，而且对于不同的 p，$L^p(G)$ 中函数的 Fourier 系数发散于无穷的性状也不相同.

更精确地，有以下的关于非交换紧致李群上的 Fourier 系数的几个定理，其中 G 上可积函数的 Fourier 系数矩阵的矩阵元素表示如下(见(1.102)式)：

$$C_\lambda(f)=\left(c_{ij}^\lambda(f)\right)_{1\leqslant i,j\leqslant d_\lambda},\quad \lambda\in\hat{G}. \tag{2.2}$$

定理 2.1 设 G 是一个非交换的紧致李群，$f\in L^2(G)$，则当 $|\lambda|\to\infty$ 时，f 的 Fourier 系数必趋于零，更准确地，必有

$$\lim_{|\lambda|\to+\infty}\sup_{1\leqslant i,\ j\leqslant d_\lambda}\left|c_{ij}^\lambda(f)\right|=0.$$

更进一步，设

$$\{\varepsilon_{ij}^\lambda,1\leqslant i,\ j\leqslant d_\lambda,\ \lambda\in\hat{G}\}$$

是任意取定的适合以下条件的正数集：

$$\lim_{|\lambda|\to+\infty}\sup_{1\leqslant i,j\leqslant d_\lambda}\varepsilon_{ij}^\lambda=0,$$

则必存在 G 上的函数 $f\in L^2(G)$，使 f 的 Fourier 系数适合

$$\overline{\lim_{|\lambda|\to+\infty}}|c_{ij}^{\lambda}(f)|/\varepsilon_{ij}^{\lambda}\geqslant 1,$$

也即 $L^2(G)$ 中函数的 Fourier 系数收敛于零的性质，对整个 $L^2(G)$ 来说不可能再改进了.

定理 2.2 设 G 是一个非交换的紧致李群，$1\leqslant p<2$，$f\in L^p(G)$. 则当 $|\lambda|\to+\infty$ 时，f 的 Fourier 系数有以下渐近估计：

$$c_{ij}^{\lambda}(f)=o(d_{\lambda}^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}})\quad(|\lambda|\to+\infty).$$

定理 2.3 设 G 是一个非交换的紧致李群，$1\leqslant p<2$，数集

$$\{\varepsilon_{ij}^{\lambda},\ 1\leqslant i,j\leqslant d_{\lambda},\ \lambda\in\widehat{G}\}$$

是任意取定的适合以下条件的正数集：

$$\lim_{|\lambda|\to+\infty}\sup_{1\leqslant i,j\leqslant d_{\lambda}}\varepsilon_{ij}^{\lambda}=0,$$

则必存在 $f\in L^p(G)$，使下式成立：

$$\overline{\lim_{|\lambda|\to+\infty}}\sup_{1\leqslant i,j\leqslant d_{\lambda}}\{|c_{ij}^{\lambda}(f)|/(\varepsilon_{ij}^{\lambda}d_{\lambda}^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}})\}\geqslant 1,$$

特别是可取到 $f\in L^p(G)$，使

$$\overline{\lim_{|\lambda|\to+\infty}}\sup_{1\leqslant i,j\leqslant d_{\lambda}}\left\{|c_{ij}^{\lambda}(f)|/(\varepsilon_{ij}^{\lambda}|\lambda|^{\frac{1}{2}(n-r)(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})})\right\}\geqslant 1$$

成立. 其中 n 是 G 的维数，r 是 G 的 Cartan 子群 T 的维数，$s=\frac{1}{2}(n-r)$ 就是正根的个数.

为了证明定理 2.3，需要证明以下定理：

定理 2.4 设 G 是一个非交换的紧致李群，(ρ_λ,V_λ) 是 G 的一个以 λ 为最高权的酉表示，且设 $\{e_0,e_1,\cdots\}$ 是表示 ρ_λ 的权向量组成的 V_λ 的一组标准正交基，ρ_λ 作用于最高权向量 e_0 上为

$$\rho_\lambda(x)(e_0)=u_{11}^{\lambda}(x_0)e_0+u_{12}^{\lambda}e_1+\cdots,$$

$$N(\lambda)=\left\{x\in G,|u_{11}^{\lambda}(x)|>\frac{1}{2}\right\},$$

则存在与 $\lambda\in\widehat{M}$ 以及与 (ρ_λ,V_λ) 的选取均无关的，仅由 G 决定的正常数 A_G，使得集合 $N(\lambda)$ 的测度 $|N(\lambda)|$ 适合

$$A_Gd_{\lambda}^{-1}\leqslant|N(\lambda)|\leqslant 4d_{\lambda}^{-1},$$

其中，取 G 上的测度为规格化的 Hear 测度.

在证明上述定理之前，先对上面几个定理作一些解释.

(i) 在定理 2.1 至定理 2.3 中，$|\lambda|$是 λ 的范数，即

$$|\lambda| = (\lambda,\lambda)^{\frac{1}{2}}.$$

(ii) f 的 Fourier 系数是对 $L^2(G)$的完备标准正交函数系而言的. 由 § 1.4 中的命题 1.11，不可约酉表示 $\rho_\lambda(x)$的矩阵元素 $u_{ij}^\lambda(x)$的 L^2 范数是 $d_\lambda^{-\frac{1}{2}}$，因此当 $d_\lambda \neq 1$ 时，它的范数小于 1，所以 $\hat{f}_\lambda$一般就不是 Fourier 系数的矩阵，在 § 1.5 中称 $\hat{f}_\lambda$为表示矩阵，就是由于这一原因. 而

$$C_\lambda(f) = d_\lambda^{\frac{1}{2}}\hat{f}_\lambda$$

中的矩阵元素则不同，它是 f 与 $L^2(G)$中的完备标准正交函数系中的函数积分而得到的，所以 § 1.5 中称 $C_\lambda(f)$为 f 的 Fourier 系数矩阵，原因就在于此.

(iii) $L^2(G)$中的完备标准正交函数系的选取显然不是唯一的，因此对不同的完备标准正交函数系，函数 f 的表示矩阵 $\hat{f}_\lambda$和 Fourier 系数矩阵 $C_\lambda(f)$不相同. 我们要证明的 Fourier 系数 $C_\lambda(f)$的性质，必须是与完备标准正交函数系(1.100)式的选取无关的性质，也就是不可约酉表示等价类的共同性质所决定的 Fourier 系数的性质. 定理 2.4 所证明的性质，是由最高权向量决定的不可约酉表示矩阵元素 $u_{11}^\lambda(x)$所具有的函数的性质，因此这一性质是不可约酉表示等价类共同具有的性质. 由此得到的 Fourier 系数的性质就是等价类的共同性质.

(iv) 不可约酉表示的维数 d_λ 与 $|\lambda|$的方幂之间的关系是比较复杂的，分为不同的层次，主要关系有下面几点：

(a) 由 § 1.4 中命题 1.17 的维数公式

$$d_\lambda = \prod_{\alpha>0}(\lambda+\delta,\alpha)\Big/\prod_{\alpha>0}(\delta,\alpha)$$

原公式中的记号 $B(\cdot,\cdot)$在此用简化记号$(\cdot,\cdot)$代替了，则由内积性质可得

$$d_\lambda \leqslant B|\lambda+\delta|^s,\ B = \prod_{\alpha>0}|\alpha|\Big/\prod_{\alpha>0}(\delta,\alpha),$$

而 $s=\frac{1}{2}(n-r)$ 是正根的个数.

因为 δ 是常向量，当 $|\lambda|\to+\infty$ 时，$|\lambda+\delta|/|\lambda|$ 就趋于极限 1，从而当 $|\lambda|\geqslant 1$ 时存在正常数 a 和 b，使得

$$a|\lambda|\leqslant|\lambda+\delta|\leqslant b|\lambda|,$$

从而存在正常数 B_1，使当 $|\lambda|\geqslant 1$ 时，有

$$d_\lambda\leqslant B_1|\lambda|^{\frac{1}{2}(n-r)}.$$

(b) 在 $\mathfrak{h}^*$ 的单位球面上适合以下条件的点 ξ，$(\xi,\alpha)\geqslant a>0$ 对所有的素根 α 均成立，其全体记为 S_a，再令

$$\Gamma_a=\{\xi\in\mathfrak{h}^*,\xi=t\eta,t\geqslant 0,\eta\in S_a\},$$

则当 $a\to 0$ 时，$\widehat{G}\cap\Gamma_a$ 的极限集就是 $\widehat{G}$. 而当 $\lambda\in\widehat{G}\cap\Gamma_a$ 时，对固定的 $a>0$，有

$$d_\lambda\geqslant a^s|\lambda+\delta|^r\Big/\prod_{\alpha>0}(\delta,\alpha),$$

同(a)结合起来就得到：当 $\lambda\in\widehat{G}\cap\Gamma_a$ 且 $|\lambda|\geqslant 1$ 时，有

$$A_1|\lambda|^{\frac{1}{2}(n-r)}\leqslant d_\lambda\leqslant B_1|\lambda|^{\frac{1}{2}(n-r)}$$

成立，其中正数 B_1 仅依赖于 G，而正数 A_1 则依赖于 G 和 $a>0$.

另一方面，必然有 $\lambda\in\widehat{G}$，使得对一个或几个素根 α，适合 $(\lambda,\alpha)=0$. 因此当 $\frac{1}{2}(n-r)\geqslant 2$ 时，存在正整数 b，使得

$$d_\lambda\leqslant B_2|\lambda+\delta|^{\frac{1}{2}(n-r)-b}$$

对无穷多个 $\lambda\in\widehat{G}$ 成立. 具体地说，它们是 $\widehat{G}$ 与一个或几个超平面 P_α^* 的交集，其中 α 是素根，P_α^* 是 $\mathfrak{h}^*$ 中以 α 为法向量的超平面.

由以上关于 d_λ 的性质可以得出定理 2.3 中第三个不等式，给出了 $f\in L^p(G)$ 中函数的 Fourier 系数发散于无穷时最高的无穷大的阶，与定理 2.2 相比较，即可知这一性质不可能再改进了.

这样，定理 2.1 至 2.3 就给出了非交换紧致李群的 Fourier 系数渐近性质的完整而准确的回答.

进一步可见，定理 2.2 和定理 2.3 既包括了定理 2.1，也包括了经典的定理. 当取 $p=2$ 时，定理 2.2 和定理 2.3 就是定理 2.1；

当取 $d_\lambda\equiv1$，即取 $s=\frac{1}{2}(n-r)=0$ 时，定理 2.2 和定理 2.3 就变成了经典的 Riemann-Lebesgue 定理.

2.1.3 定理 2.1 和定理 2.2 的证明

定理 2.1 的证明

由 §1.5 的引理 1.25 可得，若 $f\in L^2(G)$，则

$$\sum_{\lambda\in\hat{G}}\mathrm{Tr}(C_\lambda(f)\overline{C_\lambda(f)'})=\sum_{\lambda\in\hat{G}}d_\lambda\mathrm{Tr}(\hat{f}_\lambda\overline{\hat{f}'_\lambda})=\|f\|_2^2.$$

由于

$$\mathrm{Tr}(C_\lambda(f)\overline{C_\lambda(f)'})\geqslant0,$$

所以引理 1.24 就蕴含了

$$\lim_{|\lambda|\to+\infty}\sum_{i,j=1}^{d_\lambda}|c_{ij}^\lambda(f)|^2=0,$$

这就自然可推出

$$\lim_{|\lambda|\to+\infty}\sup_{1\leqslant i,j\leqslant d_\lambda}|c_{ij}^\lambda(f)|=0.$$

当给定了 $\{\varepsilon_{ij}^\lambda\}$ 后，令

$$\varepsilon_\lambda=\sup_{1\leqslant i,j\leqslant d_\lambda}\varepsilon_{ij}^\lambda.$$

对于 $L^2(G)$ 的每一组由不可约的酉表示矩阵元素给出的完备标准正交函数系

$$\{e_{ij}^\lambda(x),1\leqslant i,j\leqslant d_\lambda,\lambda\in\hat{G}\}$$

取与之对应的函数

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon_{\lambda_k}e_{11}^{\lambda_k}(x),$$

其中 λ_k $(k=1,2,\cdots)$ 的选取适合

(i) $\varepsilon_{\lambda_k}=\sup\limits_{\substack{|\lambda|\geqslant|\lambda_k|\\ \lambda\in\hat{G}}}\varepsilon_\lambda$；

(ii) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\varepsilon_{\lambda_k}=b<+\infty$.

由于 $\lim\limits_{|\lambda|\to+\infty}\varepsilon_\lambda=0$，这样，$\varepsilon_{\lambda_k}$ 必可选到，显然有

$$\|f\|_2^2=\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon_{\lambda_k}^2$$

$$\leqslant \left(\sup_k \varepsilon_{\lambda_k}\right) \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_{\lambda_k} < +\infty,$$

且 f 的 Fourier 系数是

$$C_\lambda(f) = 0, 若 \lambda \neq \lambda_k, k = 1,2,\cdots,$$
$$c_{ij}^{\lambda_k}(f) = 0, 若 i \neq 1 或 j \neq 1, 1 \leqslant i,j \leqslant d_\lambda.$$

从而有

$$\overline{\lim_{|\lambda|\to+\infty}} \sup_{1\leqslant i,j\leqslant d_\lambda} |c_{ij}^\lambda(f)| / \varepsilon_{ij}^\lambda = \lim_{k\to\infty} |c_{11}^{\lambda_k}(f)| / \varepsilon_{11}^{\lambda_k}$$
$$= \lim_{k\to\infty} \left(\varepsilon_{\lambda_k} / \varepsilon_{11}^{\lambda_k}\right) \geqslant 1.$$

定理 2.1 证毕. ▌

定理 2.2 的证明

设点集 M 为

$$M = \{x_{ij}^\lambda, 1 \leqslant i,j \leqslant d_\lambda, \lambda \in \widehat{G}\},$$

其中 x_{ij}^λ是点集 M 中的点，在 M 上定义测度 μ 为离散测度，即

$$\mu(x_{ij}^\lambda) = d_\lambda,\ 1 \leqslant i,j \leqslant d_\lambda,\ \lambda \in \widehat{G},$$

则(M,μ)为一个测度空间.

M 上的函数空间记为 $\chi(M)$，若 $\hat{f} \in \chi(M)$，则有

$$\hat{f}(x_{ij}^\lambda) = \hat{f}_{ij}^\lambda,\ 1 \leqslant i,j \leqslant d_\lambda, \lambda \in \widehat{G}.$$

定义 M 上的 L^p 空间$(1\leqslant p<+\infty)$为

$\mathrm{L}^p(M,\mathrm{d}\mu)$

$$= \left\{ \hat{f}, \| \hat{f} \|_p = \left(\sum_{\lambda\in\widehat{G}} d_\lambda \sum_{i,j=1}^{d_\lambda} | \hat{f}_{ij}^\lambda |^p \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty \right\},$$

而 M 上的 L^∞空间则定义为

$\mathrm{L}^\infty(M,\mathrm{d}\mu)$

$$= \{ \hat{f}, \| \hat{f} \|_\infty = \sup_{\lambda\in\widehat{G}} \sup_{1\leqslant i,j\leqslant d_\lambda} | \hat{f}_{ij}^\lambda | < +\infty \}.$$

于是可定义 $f\in \mathrm{L}(G)$到 M 上的函数空间 $\chi(M)$中的映射 F 为：若 $f\in \mathrm{L}(G)$，f 的 Fourier 级数是

$$f(x) \sim \sum_{\lambda\in\widehat{G}} d_\lambda \mathrm{Tr}(\hat{f}_\lambda \rho_\lambda(x)),$$

其中记

$$\hat{f}_\lambda = (\hat{f}^\lambda_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant d_\lambda},$$

于是 $\hat{f}=F(f)\in\chi(M)$则为

$$\hat{f}(x^\lambda_{ij}) = \hat{f}^\lambda_{ij}.$$

显然 F 是 G 上的可积函数空间 $\mathrm{L}(G)$到 M 上的可测函数空间 $\chi(M)$中的线性算子，称 F 为 Fourier 变换.

由 § 1.5 的引理 1.25 可得到如下引理：

引理 2.1 Fourier 变换 F 是(2,2)型的，即若 $f\in\mathrm{L}^2(G)$，则 $\hat{f}=F(f)\in\mathrm{L}^2(M,\mathrm{d}\mu)$，且有

$$\|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2$$

成立.

引理 2.2 Fourier 变换 F 是(1,∞)型的，即若 $f\in\mathrm{L}(G)$，则 $\hat{f}=F(f)\in\mathrm{L}^\infty(M,\mathrm{d}\mu)$，且有

$$\|\hat{f}\|_\infty \leqslant \|f\|_1$$

成立.

证明 由 § 1.5 的(1.101)式知

$$\hat{f}^\lambda_{ij} = \int_G f(x)\,\overline{u^\lambda_{ji}(x)}\,\mathrm{d}x.$$

因为 $u^\lambda_{ij}(x)$是不可约酉表示 $\rho_\lambda(x)$的矩阵元素，所以对一切 $x\in G$，恒有

$$|u^\lambda_{ij}(x)| \leqslant 1$$

成立. 由此可得：对一切的 $\lambda\in\hat{G}$和 $1\leqslant i,j\leqslant d_\lambda$ 均有

$$|\hat{f}^\lambda_{ij}| \leqslant \int_G |f(x)|\,\mathrm{d}x = \|f\|_1$$

成立. 此即

$$\|\hat{f}\|_\infty \leqslant \|f\|_1.$$

现在因为 Fourier 变换 F 是线性算子，由 M. Riesz 的凸性定理即得如下引理：

引理 2.3 若 $f\in\mathrm{L}^p(G)$，$1<p<2$，$\hat{f}=F(f)$是 f 的 Fourier 变换，令 p' 为 p 的对偶数，即适合$\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$，则有

$$\|\hat{f}\|_{p'}\leqslant\|f\|_{p}.$$

引理2.4　设 $f\in L^{p'}$，$g\in L^{p}$，其中 $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$，且 $p'>2$，则有

$$\int_G f(x)\overline{g(x)}\mathrm{d}x=\sum_{\lambda\in\hat{G}}d_\lambda\mathrm{Tr}(\hat{f}_\lambda\overline{\hat{g}_\lambda'}).$$

又可得到以下引理：

引理2.5　设 $f\in L^{p'}(G)$，$p'>2$，$\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$. $\hat{f}$是 f 的 Fourier 变换，则有

$$\|f\|_{p'}\leqslant\|\hat{f}\|_{p}.$$

由上面的几个引理，就可证明定理 2.2. 由引理 2.3 即得

$$\|\hat{f}\|_{p'}^{p'}=\sum_{\lambda\in\hat{G}}d_\lambda\sum_{i,j=1}^{d_\lambda}|\hat{f}_{ij}^{\lambda}|^{p'}\leqslant\|f\|_{p}^{p'}.$$

将

$$c_{ij}^{\lambda}(f)=\mathrm{d}_\lambda^{\frac{1}{2}}\hat{f}_{ij}^{\lambda}$$

代入上式，就得到

$$\sum_{\lambda\in\hat{G}}d_\lambda^{1-\frac{1}{2}p'}\sum_{i,j=1}^{d_\lambda}|c_{ij}^{\lambda}(f)|^{p'}\leqslant\|f\|_{p}^{p'}.$$

以上级数的收敛性蕴含着

$$|c_{ij}^{\lambda}(f)|^{p'}d_\lambda^{1-\frac{1}{2}p'}=o(1)\quad(|\lambda|\to+\infty),$$

由此可解出

$$|c_{ij}^{\lambda}(f)|=o(d_\lambda^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p'}})=o(d_\lambda^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}})\quad(|\lambda|\to+\infty).$$

这就证明了定理2.2.　　▌

2.1.4　定理2.4的证明

为证明定理2.2给出的 Fourier 系数的估计是精确的，即证明这一估计不可能再改进了，就需要构造出 G 上的函数，它的 Fourier 系数达到定理2.3所给出的无穷大阶的估计，这就首先需要研究不可约酉表示 $\rho_\lambda(x)$的矩阵元素的函数性质.

设 K 是 G 的满足下面条件的集合：

$$K=\{x\in G,|u_{11}^{\lambda}(x)|=1\},$$

因为 $\rho_\lambda(x)$是酉阵，这表明了对于 $k\in K$，$\rho_\lambda(k)$的第一行和第一列

的其余元素全为零，由表示的性质，就可知 K 是 G 的子群. 设 T 是 G 的一个 Cartan 子群，使得定理2.4中的基 $\{e_0, e_1, \cdots\}$ 是 $\rho_\lambda(T)$ 的权向量，则 T 必是 K 的子群. 再设 $\mathfrak{h}$ 是 T 对应的 G 的李代数 $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 子代数，则可得 $\mathfrak{g}$ 的一组 Weyl 基：

$$\left\{ \mathrm{i}H_1, \cdots, \mathrm{i}H_r, X_\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}(E_\alpha - E_{-\alpha}), \right.$$

$$\left. X_{-\alpha} = \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}(E_\alpha + E_{-\alpha}), \alpha \in \Sigma_+ \right\}, \tag{2.2}$$

其中 $\mathrm{i}H_1, \cdots, \mathrm{i}H_r$ 是 $\mathfrak{h}$ 的一组标准正交基，而 Weyl 基则是 $\mathfrak{g}$ 的一组标准正交基.

表示 ρ_λ 的微分给出了 $\mathfrak{g}$ 的表示 $(\mathrm{d}\rho_\lambda, V_\lambda)$，它可自然地延拓为 $\mathfrak{g}$ 的复化的不可约表示. 因为 ρ_λ 是 G 的酉表示，所以对一切 $X \in \mathfrak{g}$，$\mathrm{d}\rho_\lambda(X)$ 就是反 Hermite 阵. 由(2.2)式，可用 $\mathrm{d}\rho_\lambda(X_\alpha)$ 和 $\mathrm{d}\rho_\lambda(X_{-\alpha})$ 解出 $\mathrm{d}\rho_\lambda(E_\alpha)$ 和 $\mathrm{d}\rho_\lambda(E_{-\alpha})$，并可得到

$$\overline{\mathrm{d}\rho_\lambda(E_\alpha)}' = \mathrm{d}\rho_\lambda(E_{-\alpha}), \quad \alpha \in \Sigma_+.$$

再根据§1.4的(1.86)式和 e_0 是最高权 λ 的权向量，可得

$$\mathrm{d}\rho_\lambda(E_\alpha)(e_0) = 0, \quad \alpha \in \Sigma_+,$$

由此即可推得

$$\mathrm{d}\rho_\lambda(X_\alpha)(e_0) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{d}\rho_\lambda(E_{-\alpha})(e_0),$$

$$\mathrm{d}\rho_\lambda(X_{-\alpha})(e_0) = \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\mathrm{d}\rho_\lambda(E_{-\alpha})(e_0).$$

用 V_λ 上的 Hermite 内积 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 计算 $\mathrm{d}\rho_\lambda(X_\alpha)(e_0)$ 和 $\mathrm{d}\rho_\lambda(X_{-\alpha})(e_0)$ 的向量长度，可得

$$\begin{aligned} &|\mathrm{d}\rho_\lambda(X_\alpha)(e_0)|^2 \\ &= \langle \mathrm{d}\rho_\lambda(X_\alpha)(e_0), \mathrm{d}\rho_\lambda(X_\alpha)(e_0) \rangle \\ &= \frac{1}{2}\langle \mathrm{d}\rho_\lambda(E_{-\alpha})(e_0), \mathrm{d}\rho_\lambda(E_{-\alpha})e_0 \rangle, \end{aligned}$$

将 e_0 看作单位列向量，就得到

$$|\mathrm{d}\rho_\lambda(X_\alpha)(e_0)|^2$$

$$= \frac{1}{2} e_0' \overline{\mathrm{d}\rho_\lambda(E_{-\alpha})}' \mathrm{d}\rho_\lambda(E_{-\alpha}) e_0$$

$$= \frac{1}{2} e_0' \mathrm{d}\rho_\lambda(E_\alpha) \mathrm{d}\rho_\lambda(E_{-\alpha}) e_0.$$

再用§1.4的(1.85)式的计算方法计算上式第二个等式的右端，则有

$$\begin{aligned} &\mathrm{d}\rho_\lambda(E_\alpha)\mathrm{d}\rho_\lambda(E_{-\alpha})e_0 \\ &\quad = \mathrm{d}\rho_\lambda([E_\alpha, E_{-\alpha}])e_0 \\ &\qquad + \mathrm{d}\rho_\lambda(E_{-\alpha})\mathrm{d}\rho_\lambda(E_\alpha)e_0 \\ &\quad = \mathrm{d}\rho_\lambda(H_\alpha)e_0 = (\lambda, \alpha)e_0, \end{aligned}$$

对一切的 $\alpha \in \Sigma_+$ 成立，这就可得到

$$|\mathrm{d}\rho_\lambda(X_\alpha)(e_0)| = \frac{1}{\sqrt{2}}(\lambda, \alpha)^{\frac{1}{2}}, \quad \alpha \in \Sigma_+. \tag{2.3}$$

同理可得到

$$|\mathrm{d}\rho_\lambda(X_{-\alpha})(e_0)| = \frac{1}{\sqrt{2}}(\lambda, \alpha)^{\frac{1}{2}}, \quad \alpha \in \Sigma_+. \tag{2.4}$$

由以上两式，当 $(\lambda, \alpha) \neq 0$ 时，可得

$$\mathrm{d}\rho_\lambda(X_\alpha)(e_0) \neq 0, \quad \mathrm{d}\rho_\lambda(X_{-\alpha})(e_0) \neq 0,$$

再由§1.4的(1.84)式就得到 $\mathrm{d}\rho_\lambda(X_\alpha)(e_0)$ 和 $\mathrm{d}\rho_\lambda(X_{-\alpha})(e_0)$ 是两个实正交的权为 $\lambda-\alpha$ 的权向量，其中 $\alpha \in \Sigma_+$. 所以 $\mathrm{d}\rho_\lambda(X_\alpha)$ 和 $\mathrm{d}\rho_\lambda(X_{-\alpha})$ 的第一行和第一列的元素不全为零. 再由§1.4的(1.77)式

$$\rho_\lambda(\exp tX) = \mathrm{Expd}\rho_\lambda(tX)$$

就可得到：当 $(\lambda, \alpha) \neq 0$ 且

$$\exp tX_\alpha \neq 幺元\ e, \quad \exp tX_{-\alpha} \neq 幺元\ e$$

时，就有

$$|u_{11}^\lambda(\exp tX_\alpha)| < 1, \quad |u_{11}^\lambda(\exp tX_{-\alpha})| < 1.$$

而若 $(\lambda, \alpha) = 0$ 时，则显然有

$$\rho_\lambda(\exp tX_\alpha)(e_0) = e_0,$$

和

$$\rho_\lambda(\exp tX_{-\alpha})(e_0) = e_0.$$

因此，令

$$\Delta_\lambda^+ = \{\alpha \in \Sigma_+, (\lambda, \alpha) \neq 0\},$$
$$\Delta_\lambda^- = \{\alpha \in \Sigma_+, (\lambda, \alpha) = 0\},$$

就可得到 K 的李代数 $\mathfrak{k}$ 由 $\mathfrak{h}$ 和 $X_\alpha, X_{-\alpha}, \alpha \in \Delta_\lambda^-$ 张成. 记

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$$

是 $\mathfrak{g}$ 的正交直和分解，则

$$\{X_\alpha, X_{-\alpha}, \alpha \in \Delta_\lambda^+\}$$

就是 $\mathfrak{p}$ 的一组标准正交基. 仍然记

$$\mathrm{P} = \exp \mathfrak{p},$$

并记

$$N_{o,\lambda} = \left\{pK \in G/K, |u_{11}^\lambda(p)| > \frac{1}{2}, p \in P\right\},$$
$$\widetilde{N}_{o,\lambda} = \{v \in V_\lambda, v = \rho_\lambda(p)(e_0), p \in N_{o,\lambda}\},$$
$$M = \{v \in V_\lambda, v = \rho_\lambda(p)(e_0), p \in P\}.$$

由于 § 1.3的引理1.5以及如果

$$\rho_\lambda(p_1)(e_0) = \rho_\lambda(p_2)e_0,$$

则必有 $p_2^{-1}p_1 \in K$，从而映射

$$F: G/K \to M, pK \to \rho_\lambda(p)(e_0)$$

是微分同胚，因此 $N_{o,\lambda}$与 $\widetilde{N}_{o,\lambda}$也微分同胚. 而由(2.3)和(2.4)式映射 F 的 Jacobi 行列式在 $o=eK$ 点等于

$$\det J_F(o) = \prod_{\alpha \in \Delta_\lambda^+} (\lambda, \alpha). \tag{2.5}$$

由此可得：在任意一点 $pK \in G/K$ 的切空间和 M 在点 $\rho_\lambda(p)(e_0)$ 的切空间上计算映射 F 的 Jacobi 行列式时，仍然有

$$\det J_F(pK) = \prod_{\alpha \in \Delta_\lambda^+} (\lambda, \alpha). \tag{2.6}$$

这就得到了 M 的欧氏体积

$$|M| = \prod_{\alpha \in \Delta_\lambda^+} (\lambda, \alpha) \int_{G/K} \mathrm{d}(pK). \tag{2.7}$$

而 $\widetilde{N}_{o,\lambda}$的欧氏体积则为

$$|\widetilde{N}_{o,\lambda}| = \prod_{\alpha\in\Delta_\lambda^+}(\lambda,\alpha)\int_{N_{o,\lambda}} \mathrm{d}(pK)$$

$$= \prod_{\alpha\in\Delta_\lambda^+}(\lambda,\alpha)\,|N_{o,\lambda}|. \tag{2.8}$$

容易验证：

$$N(\lambda) = N_{o,\lambda}K,$$

从而可得它们的测度间的关系：

$$|N(\lambda)| = |N_{o,\lambda}|\cdot|K|$$

以及有 G、G/K、K 之间的测度关系：

$$|G| = |G/K|\cdot|K|.$$

从而可得

$$|N(\lambda)| = |\widetilde{N}_{o,\lambda}|\cdot|K|\cdot|G/K|/|M|$$

$$= |\widetilde{N}_{o,\lambda}|\cdot|K|\Big/\prod_{\alpha\in\Delta_\lambda^+}(\lambda,\alpha). \tag{2.9}$$

因为 G 的子李群只有有限个，且 G 的子群 K 上的不变 Riemann 度量可取为 G 的不变 Riemann 度量在 K 上的限制，所以 $|K|$ 仅依赖于 G. 因而由(2.9)式，只需估计 $\widetilde{N}_{o,\lambda}$的欧氏体积.

研究 $u_{11}^\lambda(x)$在幺元处的实导数，由于

$$u_{11}^\lambda(x) = e_0'\rho_\lambda(x)e_0,$$

由此可得，对 α 或 $-\alpha$ 属于 Δ_λ^+，有

$$(\widetilde{X}_\alpha u_{11}^\lambda)(e) = e_0'\mathrm{d}\rho_\lambda(X_\alpha)e_0 = 0.$$

而对 $\alpha\in\Delta_\lambda^+$，则有

$$(\widetilde{X}_\alpha^2 u_{11}^\lambda)(e) = e_0'\mathrm{d}\rho_\lambda(X_\alpha)^2 e_0$$

$$= -\frac{1}{2}e_0'\mathrm{d}\rho_\lambda(E_\alpha)\mathrm{d}\rho_\lambda(E_{-\alpha})e_0$$

$$+\frac{1}{2}e_0'\mathrm{d}\rho_\lambda(E_{-\alpha})^2 e_0$$

$$= -\frac{1}{2}(\lambda,\alpha).$$

同理可得当 $\alpha\in\Delta_\lambda^+$ 时，有

$$(\widetilde{X}_{-\alpha}^2 u_{11}^\lambda)(e_0) = -\frac{1}{2}(\lambda,\alpha).$$

类似可求各阶导数，从而可得

$$u_{11}^\lambda(p) = 1 - \sum_{\alpha\in\Delta_\lambda^+}\left(\frac{1}{2}x_\alpha^2(\lambda,\alpha) + \frac{1}{2}y_\alpha^2(\lambda,\alpha)\right) + O(|X|^3(\lambda,\alpha)^{3/2}), \tag{2.10}$$

其中 $p=\exp X, X\in\mathfrak{p}$,

$$X = \sum_{\alpha\in\Delta_\lambda^+}(x_\alpha X_\alpha + y_\alpha X_{-\alpha}),\ |X| = \left(\sum_{\alpha\in\Delta_\lambda^+} x_\alpha^2 + y_\alpha^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

根据指数映射的性质，存在 $r_0>0$，使得映射

$$\exp: |X| < r_0 \to \exp X \to \exp XK$$

都是可微的嵌入. 而由(2.10)式，存在 $b_0>0$，当

$$|x_\alpha| \text{ 和 } |y_\alpha| < b_0/(\lambda,\alpha)^{\frac{1}{2}},\ \alpha\in\Delta_\lambda^+ \tag{2.11}$$

时，

$$|u_{11}^\lambda(p)| > \frac{1}{2}.$$

取 $a_0>0$适合 $a_0<b_0$及

$$2a_0^2\sum_{\lambda\in\Delta_\lambda^+} 1/(\lambda,\alpha) < r_0,$$

并置

$$N_0 = \left\{\exp XK, X = \sum_{\alpha\in\Delta_\lambda^+}(x_\alpha X_\alpha + y_\alpha X_{-\alpha}),\ |x_\alpha|, |y_\alpha| < b_0/(\lambda,\alpha)^{\frac{1}{2}}\right\},$$

$$\widetilde{N}_0 = \{\rho_\lambda(p)(e_0), p\in N_0\},$$

就有 $N_0\subset P$ 且当 $p\in N_0$时，

$$|u_{11}^\lambda(p)| > \frac{1}{2},$$

由此就得到

$$\widetilde{N}_0 \subset \widetilde{N}_{0,\lambda},$$

以及

$$|\widetilde{N}_0| = \prod_{\alpha\in\Delta_\lambda^+}(\lambda,\alpha)\int_{N_0}\mathrm{d}(pK).$$

由(2.11)式及 G/K 上的 G 不变测度的性质，即可得到当 $a_0>0$ 适当小时，有

$$\int_{N_0}\mathrm{d}(Pk) \geqslant \frac{1}{2}a_0^s\prod_{\alpha\in\Delta_\lambda^+}(\lambda,\alpha)^{-1}$$

式中 s 是 P 的实维数，从而得到

$$|\widetilde{N}_0| \geqslant \frac{1}{2}a_0^s = C_0 > 0.$$

由此推出

$$|\widetilde{N}_{0,\lambda}| \geqslant C_0 > 0.$$

这就得到了 $|N(\lambda)|$ 的下界估计：

$$|N(\lambda)| \geqslant C_0|K|\Big/\prod_{\alpha\in\Delta_\lambda^+}(\lambda,\alpha). \tag{2.12}$$

现在来估计

$$\prod_{\alpha\in\Delta_\lambda^+}(\lambda,\alpha).$$

由引理1.8和引理1.9可得到，对一切素根 α，$2(\lambda,\alpha)/(\alpha,\alpha)$ 都是非负整数，因为 λ 是不可约酉表示 ρ_λ 的最高权，从而必为支配权. 又对一切素根 α，有

$$2(\delta,\alpha)/(\alpha,\alpha) = 1,$$

从而数集 $\{(\delta,\alpha),\alpha\in\Sigma_+\}$ 是仅由 G 决定的正有理数的有限集. 再由根系的性质：每个正根 α 均是素根的非负整系数的线性组合，且至少有一个系数为正整数. 从而存在仅由 G 决定的正数 b，当 $\alpha\in\Delta_\lambda^+$ 时，有

$$b(\lambda+\delta,\alpha) \leqslant (\lambda,\alpha) \leqslant (\lambda+\delta,\alpha)$$

成立. 而当 $\alpha\in\Delta_\lambda^-$ 时，则有

$$(\lambda+\delta,\alpha) = (\delta,\alpha).$$

由§1.4的命题1.17的不可约酉表示的维数公式

$$d_\lambda = \prod_{\alpha>0}(\lambda+\delta,\alpha)\Big/\prod_{\alpha>0}(\delta,\alpha),$$

就得到

$$d_\lambda = \prod_{\alpha\in\Delta_\lambda^+}(\lambda+\delta,\alpha)\Big/\prod_{\alpha\in\Delta_\lambda^+}(\delta,\alpha),$$

从而可得到：存在仅由 G 决定的正数 a_G 和 b_G，使得

$$a_G\prod_{\alpha\in\Delta_\lambda^+}(\lambda,\alpha)\leqslant d_\lambda\leqslant b_G\prod_{\alpha\in\Delta_\lambda^+}(\lambda,\alpha).$$

将上式代入(2.12)，并取 $A_G=a_GC_0|K|$，就得到

$$|N(\lambda)|\geqslant A_G d_\lambda^{-1}.$$

另一方面，由

$$\frac{1}{4}|N(\lambda)|\leqslant\int_{N(\lambda)}|u_{11}^\lambda(x)|^2\mathrm{d}x$$

$$\leqslant\int_G|u_{11}^\lambda(x)|^2\mathrm{d}x=d_\lambda^{-1},$$

可得到

$$|N(\lambda)|\leqslant 4d_\lambda^{-1}.$$

这就完成了定理2.4的证明. ▍

2.1.5 定理2.3的证明

首先构作使定理2.3成立的 G 上函数.

对每个 $\lambda\in\widehat{G}$，作一个 G 上的 C^∞ 函数 $g_\lambda(x)$，使它适合

(1) $\operatorname{supp} g_\lambda(x)\subset N(\lambda)$；

(2) 存在 $M(\lambda)\subset N(\lambda)$，$M(\lambda)$的测度是

$$|M(\lambda)|=\frac{1}{2}|N(\lambda)|,$$

且当 $x\in M(\lambda)$时

$$g_\lambda(x)=4d_\lambda^{1/p}A_G^{-1};$$

(3) $0\leqslant g_\lambda(x)\leqslant 4d_\lambda^{1/p}A_G^{-1}$.

再作函数 $f_\lambda(x)$为

$$f_\lambda(x)=g_\lambda(x)u_{11}^\lambda(x),$$

则 $f_\lambda \in L^p(G)$ 且有

$$\|f_\lambda\|_p = \left(\int_G |f_\lambda(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{1/p}$$
$$= \left(\int_G |g_\lambda(x)|^p \cdot |u_{11}^\lambda(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{1/p}$$
$$\leqslant \left(4^p d_\lambda A_G^{-p} \int_{N(\lambda)} \mathrm{d}x\right)^{1/p}$$
$$\leqslant \left(4^p A_G^{-p} 4\right)^{1/p}$$
$$\leqslant 16 A_G^{-1}.$$

而 f_λ 的 Fourier 系数 $c_{11}^\lambda(f)$ 则有下面的估计：

$$c_{11}^\lambda(f) = \int_G f_\lambda(x) \overline{e_{11}^\lambda(x)} \mathrm{d}x$$
$$= d_\lambda^{\frac{1}{2}} \int_G g_\lambda(x) |u_{11}^\lambda(x)|^2 \mathrm{d}x$$
$$\leqslant 4 A_G^{-1} d_\lambda^{\frac{1}{2}+\frac{1}{p}} \int_G |u_{11}^\lambda(x)|^2 \mathrm{d}x$$
$$= 4 A_G^{-1} d_\lambda^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}},$$

$$c_{11}^\lambda(f) = \int_G f_\lambda(x) \overline{e_{11}^\lambda(x)} \mathrm{d}x$$
$$= d_\lambda^{\frac{1}{2}} \int_G g_\lambda(x) |u_{11}^\lambda(x)|^2 \mathrm{d}x$$
$$\geqslant 4 A_G^{-1} d_\lambda^{\frac{1}{2}+\frac{1}{p}} \int_{M(\lambda)} |u_{11}^\lambda(x)|^2 \mathrm{d}x$$
$$\geqslant A_G^{-1} d_\lambda^{\frac{1}{2}+\frac{1}{p}} |M(\lambda)|$$
$$\geqslant \frac{1}{2} A_G^{-1} d_\lambda^{\frac{1}{2}+\frac{1}{p}} |N(\lambda)|$$
$$\geqslant \frac{1}{2} d_\lambda^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}.$$

现在令

$$\epsilon(\lambda) = \sup_{1 \leqslant i,j \leqslant d_\lambda} \{\epsilon_{ij}^\lambda\},$$

并选子列

$$\{\lambda_k,\ k=1,2,\cdots\}\subset\hat{G},$$

特别可选以上子列适合于

$$\{\lambda_k,\ k=1,2,\cdots\}\subset\Gamma_a\subset\hat{G},$$

其中 Γ_a 由 §2.1的2.1.2小节里关于定理的说明中的(iv)所定义.

子列 $\{\lambda_k,\ k=1,2,\cdots\}$ 的选取满足以下条件:

(1) $|\lambda_{k+1}+\delta|\geqslant 8n|\lambda_k+\delta|$, n 是 G 的维数;

(2) 取正数 a, $0<a<1$, 使下式成立:

$$\epsilon(\lambda_{k+1})\leqslant a\epsilon(\lambda_k);$$

(3) 当 $p\geqslant k+1$ 时, 对 $s=1,2,\cdots,k$ 恒有

$$\sup_{i,j}|c_{ij}^{\lambda_p}(f_{\lambda_s})|<1$$

成立. 这样的子列 $\{\lambda_k\}$ 总是可以取到的. 设 $\lambda_1,\cdots,\lambda_k$ 已经取到, 并使以上三个条件成立. 因为 f_{λ_s} 是 C^∞ 函数, 从而当 $|\lambda|\to+\infty$ 时, 必有

$$\sup_{i,j}|c_{ij}^{\lambda}(f_{\lambda_s})|\to 0,$$

对 $s=1,2,\cdots,k$ 均成立. 从而可找到共同的正数 A_k, 使当 $\lambda\in\hat{G}$ (或 $\lambda\in\Gamma_a$) 且 $|\lambda|>A_k$ 时, 对 $s=1,2,\cdots,k$

$$\sup_{i,j}|c_{ij}^{\lambda}(f_{\lambda_s})|<1$$

均成立. 又因为 $\epsilon(\lambda)\to 0$, 对任意取定的 $0<a<1$, 存在正数 B_k, 使当 $\lambda\in\hat{G}$(或 $\lambda\in\Gamma_a$) 且 $|\lambda|>B_k$ 时, $\epsilon(\lambda)<a\epsilon(\lambda_k)$. 同样可选正数 C_k 使当 $\lambda\in\hat{G}$(或 $\lambda\in\Gamma_a$) 且 $|\lambda|>C_k$ 时, 条件(1)成立. 从而可取

$$N_k=\max\{A_k,B_k,C_k\},$$

使当 $\lambda\in\hat{G}$(或 $\lambda\in\Gamma_a$) 且 $|\lambda|>N_k$ 时, 就使条件(1)、(2)、(3)均成立, 从中选一个为 λ_{k+1}. 依此递推, 符合条件的子列 $\{\lambda_k,\ k=1,2,\cdots\}$ 即选得.

再选数列 $\{t_k,\ k=1,2,\cdots\}$ 使适合

(1) $(1-t_k^2|\lambda_k+\delta|^2)^n\geqslant\dfrac{3}{4}$, 其中 n 是群 G 的维数;

(2) $t_k|\lambda_{k+1}+\delta|>1$.

显然, 取

$$4n|\lambda_k+\delta|\leqslant\frac{1}{t_k}\leqslant 6n|\lambda_k+\delta|,$$

即可使(1)、(2)成立.

作函数 f_{λ_k} 的 Riesz—龚平均，并用它们构作函数 $F(x)$ 如下：

$$F(x)=\sum_{k=1}^{\infty}4\varepsilon(\lambda_k)S_{t_k}^{\eta}(f_{\lambda_k},x),$$

其中

$$S_t^{\eta}(f,x)=\sum_{\lambda\in\hat{G}}(1-t^2|\lambda+\delta|^2)_+^{\eta}\, d_\lambda\chi_\lambda * f(x).$$

在 § 2.3节中证明了

$$\|S_t^{\eta}(f)\|_p\leqslant\|S_t^{\eta}\|\cdot\|f\|_p$$

及证明了

$$A=\sup_{t>0}\|S_t^{\eta}\|<+\infty.$$

利用这一结果，就可得到

$$\begin{aligned}\|F\|_p&\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}4\varepsilon(\lambda_k)\|S_t^{\eta}(f_{\lambda_k})\|_p\\&\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}4\varepsilon(\lambda_k)\|S_t^{\eta}\|\cdot\|f_{\lambda_k}\|_p\\&\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}4\varepsilon(\lambda_k)A16A_G^{-1}\\&\leqslant\frac{4}{1-a}\varepsilon(\lambda_1)16AA_G^{-1}\\&=\frac{64}{1-a}\varepsilon(\lambda_1)AA_G^{-1},\end{aligned}$$

即 $F\in\mathrm{L}^p(G)$.

以下计算 F 的 Fourier 系数，有

$$\begin{aligned}c_{11}^{\lambda_k}(F)&=\int_G F(x)\,\overline{e_{11}^{\lambda_k}(x)}\mathrm{d}x\\&=\sum_{r=1}^{\infty}4\varepsilon(\lambda_r)\int_G S_{t_r}^{\eta}(f_{\lambda_r},x)\,\overline{e_{11}^{\lambda_k}(x)}\mathrm{d}x\\&=\sum_{r=k}^{\infty}4\varepsilon(\lambda_r)\int_G S_{t_r}^{\eta}(f_{\lambda_r},x)\,\overline{e_{11}^{\lambda_k}(x)}\mathrm{d}x\end{aligned}$$

$$= \sum_{r=k}^{\infty} 4\varepsilon(\lambda_r)(1 - t_r^2|\lambda_k + \delta|^2)^n c_{11}^{\lambda_k}(f_{\lambda_r}).$$

由引理3，当$1 \leqslant p < 2$时，有

$$|c_{11}^{\lambda_k}(f_{\lambda_r})|^{p'} d_{\lambda_k}^{1-\frac{1}{2}p'} \leqslant \|f_{\lambda_r}\|_p^{p'},$$

其中$(1/p') + (1/p) = 1$. 由此可解出

$$|c_{11}^{\lambda_k}(f_{\lambda_r})| \leqslant d_{\lambda_k}^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}} \|f_{\lambda_r}\|_p \leqslant 16 A_G^{-1} d_{\lambda_k}^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}.$$

将 $c_{11}^{\lambda_k}(f_{\lambda_r})$的估计式代入以上 $c_{11}^{\lambda_k}(F)$的计算式中，得

$$\begin{aligned} |c_{11}^{\lambda_k}(F)| &\leqslant \sum_{r=k}^{\infty} 4\varepsilon(\lambda_r) |c_{11}^{\lambda_k}(f_{\lambda_r})| \\ &\leqslant 4\varepsilon(\lambda_k) 16 A_G^{-1} d_{\lambda_k}^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}} \sum_{r=k}^{\infty} a^{r-k} \\ &= \frac{64}{1-a} A_G^{-1} \varepsilon(\lambda_k) d_{\lambda_k}^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

再来估计$|c_{11}^{\lambda_k}(F)|$的下界，则有

$$\begin{aligned} |c_{11}^{\lambda_k}(F)| &\geqslant 4\varepsilon(\lambda_k)(1 - t_k^2|\lambda_k + \delta|^2)^n |c_{11}^{\lambda_k}(f_{\lambda_k})| \\ &\quad - \sum_{r=k+1}^{\infty} 4\varepsilon(\lambda_r) |c_{11}^{\lambda_k}(f_{\lambda_r})| \\ &\geqslant \frac{3}{2}\varepsilon(\lambda_k) d_{\lambda_k}^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}} \\ &\quad - \sum_{r=k+1}^{\infty} 4\varepsilon(\lambda_r) a^{r-k} 16 A_G^{-1} d_{\lambda_k}^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}} \\ &= \left(\frac{3}{2} - 64 \cdot \frac{a}{1-a} A_G^{-1}\right) \varepsilon(\lambda_k) d_{\lambda_k}^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}} \\ &\geqslant \varepsilon(\lambda_k) d_{\lambda_k}^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

只要取 $a = \frac{1}{128} A_G$ 即可.

现在易见 F 的 Fourier 系数使定理2.3的第一个不等式成立，而当取 $\lambda_k \in \Gamma_a$, $k = 1, 2, \cdots$时，F 的 Fourier 系数就使定理2.3的第二个不等式成立，这就证明了定理2.3. ▌

§2.2 Poisson 求和公式

在紧致李群的调和分析中，构造适当的核函数来解决紧致李群上的调和分析的问题是一个基本的方法.这时有两个考虑问题的方向：一是先构造出群上的核函数，再确定核函数的 Fourier 系数；另一是先确定求和系数即核函数的 Fourier 系数，再确定核函数.这就是龚昇教授在酉群上的调和分析中建立的、并被华罗庚教授总结为八个字的"从和到核"与"从核到和"的方法.

本节运用 Cartan 子代数上的 Fourier 变换，建立起紧致李群上中心函数的两种形式的 Poisson 求和公式，它给出了 Cartan 子代数上中心函数的 Fourier 变换和该函数通过 Poisson 求和公式得到的紧致李群上的中心函数的 Fourier 系数间的关系.

但是紧致李群上的调和分析本身有着更丰富的内容，例如华罗庚教授在《多复变数函数论中的典型域的调和分析》中建立的 Poisson－华核，以及龚昇教授在酉群上的调和分析中建立的 Cesaro－龚核，就不能用 Cartan 子代数上的 Fourier 变换的方法来研究它们.

另一方面，紧致李群上的调和分析中还有一类重要的算子，例如 Riesz 变换、Bessel 变换以及奇异积分算子，它们的核函数均不是中心函数，也不能简单地用本节中的方法来处理.

国外一些学者[46]用李代数上的 Fourier 变换研究紧致李群上的一类中心乘子.我们要说明，他们的结果实际上已包含在我们的 Cartan 子代数上的 Fourier 变换方法的结果之中，且 Cartan 子代数上 Fourier 变换的方法包含了更加丰富、更加深入和具体的内容.

2.2.1 两种 Poisson 求和公式

设 G 是一个连通的紧致李群，$\mathfrak{g}$ 是 G 的李代数，T 是 G 的一个 Cartan 子群，$\mathfrak{h}$ 是 T 对应的 $\mathfrak{g}$ 的一个 Cartan 子代数，$\hat{G}$是 G 的酉对偶，$(\cdot,\cdot)$是 $\mathfrak{g}$ 上的 G 不变内积.再设 G 的实维数是 n，T 的实维数是 r，则必有 $n=2m+r$，其中 m 就是 $\mathfrak{g}$ 的正根的个数，面 r 又

叫做 G 的秩. 将 G 的特征格简记为

$$\Lambda = \exp^{-1}e \cap \mathfrak{h}. \tag{2.13}$$

在 Cartan 子代数 $\mathfrak{h}$ 中取一组标准正交基

$$\{H_1, \cdots, H_r\}, \tag{2.14}$$

则 $\mathfrak{h}$ 中的点 h 就有坐标表示：

$$h = h_1 H_1 + \cdots + h_r H_r. \tag{2.15}$$

由§1.3的1.3.2小节的讨论，可定义 $\mathfrak{h}$ 上可积函数空间 $\mathrm{L}(\mathfrak{h})$ 到 Cartan 子群上可积函数空间 $\mathrm{L}(T)$ 中的线性映射

$$\Pi: \mathrm{L}(\mathfrak{h}) \to \mathrm{L}(T),$$
$$f \in \mathrm{L}(\mathfrak{h}) \to \Pi f \in \mathrm{L}(T),$$

它定义为

$$(\Pi f)(\exp h) = \sum_{k \in \Lambda} f(h + k), \tag{2.16}$$

且容易验证下式成立：

$$\begin{aligned}\int_T (\Pi f)(t)\mathrm{d}t &= \frac{1}{|Q|}\int_Q (\Pi f)(\exp h)\mathrm{d}h \\ &= \frac{1}{|Q|}\int_{\mathfrak{h}} f(h)\mathrm{d}h,\end{aligned} \tag{2.17}$$

其中 $\mathrm{d}t$ 是 Cartan 子群 T 上的规格化的 Haar 测度，Q 是§1.3的1.3.2小节中定义的 $\mathfrak{h}$ 中 T 的积分区域.

设

$$\begin{cases} D(h) = \prod_{\alpha>0} 2\mathrm{i}\sin\frac{1}{2}(\alpha, h), \\ P(h) = \prod_{\alpha>0} (\alpha, h), \\ P\left(\frac{\partial}{\partial h}\right) = \prod_{\alpha>0}\left(\alpha, \frac{\partial}{\partial h}\right), \\ D_0(h) = D(h)/P(h). \end{cases} \tag{2.18}$$

其中 $D(h)$ 就是(1.98)式中的 $D(h)$ 的另一表达式，$\left(\alpha, \frac{\partial}{\partial h}\right)$ 是 α 和 $\frac{\partial}{\partial h}$ 的形式内积.

李代数 $\mathfrak{g}$ 上的一个中心函数 f 定义为：至多除去一个零测集，对一切 $X\in\mathfrak{g}$ 和 $y\in G$，有

$$f(y\cdot X)=f(X)$$

恒成立. 其中 $y\cdot X$ 是 $\mathrm{Ad}y(X)$ 的简记，则 $f(X)$ 由它在一个 Cartan 子代数 $\mathfrak{h}$ 上的值唯一确定，且 f 在 $\mathfrak{h}$ 上的限制则是 $\mathfrak{h}$ 上的 Weyl 群对称的函数. 反之，$\mathfrak{h}$ 上的任意一个 Weyl 群对称的函数可唯一延拓为 $\mathfrak{g}$ 上的一个中心函数. 由这种一一对应的关系，下面我们主要讨论 $\mathfrak{h}$ 上的 Weyl 群对称的函数.

设 Φ 是 $\mathfrak{h}$ 上的一个 Weyl 群对称的函数，它定义为：至多除去一个零测集，对一切 $h\in\mathfrak{h}$ 和 $\sigma\in W$，恒有

$$\Phi(\sigma(h))=\Phi(h)$$

成立. 又设 ϕ 是 Φ 的 Fourier 变换，即

$$\phi(H)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}r}}\int_{\mathfrak{h}}\Phi(h)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(H,h)}\mathrm{d}h. \tag{2.19}$$

再令

$$\Phi_t(h)=t^{-r}\Phi(t^{-1}h),\ t>0. \tag{2.20}$$

则有下面两个紧致李群上的中心函数的 Poisson 求和公式的定理.

定理 2.5　设 Φ 是 $\mathfrak{h}$ 上的 Weyl 群对称的可积函数，且 Φ 具有直到 m 阶的所有 L^1 偏导数. ϕ 是 Φ 的由(2.19)式定义的Fourier变换，Φ_t 由(2.20)式定义. 设 $K_t^\sharp(x)$ 是 G 上的中心函数，由下式定义：

$$K_t^\sharp(\exp h)=\frac{(-\mathrm{i})^m|Q|}{(2\pi)^{\frac{1}{2}r}P(\delta)}\Pi\left\{\left(P\left(\frac{\partial}{\partial h}\right)\Phi_t\right)(h)D(h)^{-1}\right\}.$$

其中 $\Pi:\mathrm{L}(\mathfrak{h})\to\mathrm{L}(T)$ 由(2.16)式定义. 则有 $K_t^\sharp\in\mathrm{L}_1(G)$ 且 $K_t^\sharp(x)$ 的 Fourier 级数为

$$K_t^\sharp(x)\sim\sum_{\lambda\in\hat{G}}\phi(t(\lambda+\delta))d_\lambda\chi_\lambda(x). \tag{2.21}$$

证明　一般说来，$D(h)$ 未必是 T 上的单值函数，但由 §1.4中

命题1.16的证明中可知$|D(h)|^2$必为 T 上的单值函数，即对一切 $k\in\Lambda$和 $h\in\mathfrak{h}$，恒有

$$|D(h+k)|^2 = |D(h)|^2,\ k\in\Lambda \tag{2.22}$$

成立.

先证 $K_t^\phi(x)$在 G 上的可积性：由 G 上中心函数的积分公式

$$\begin{aligned}
&\int_G |K_t^\phi(x)|\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{|W|\cdot|Q|}\int_Q |K_t^\phi(\exp h)|\cdot|D(h)|^2\mathrm{d}h \\
&= \frac{1}{|W|P(\delta)(2\pi)^{\frac{1}{2}r}} \\
&\quad\times\int_Q\left|\pi\left\{\left(P\left(\frac{\partial}{\partial h}\right)\Phi_t\right)(\cdot)D(\cdot)^{-1}\right\}\right|\cdot|D(h)|^2\mathrm{d}h.
\end{aligned}$$

据(2.22)和(2.17)式即得

$$\begin{aligned}
&\int_G |K_t^\phi(x)|\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{|W|P(\delta)(2\pi)^{\frac{1}{2}r}}\int_{\mathfrak{h}}\left|\left(P\left(\frac{\partial}{\partial h}\right)\Phi_t\right)(h)\,\overline{D(h)}\right|\mathrm{d}h \\
&\leqslant \frac{1}{P(\delta)(2\pi)^{\frac{1}{2}r}}\int_{\mathfrak{h}}\left|\left(P\left(\frac{\partial}{\partial h}\right)\Phi_t\right)(h)\right|\mathrm{d}h \\
&= \frac{1}{P(\delta)(2\pi)^{\frac{1}{2}r}t^m}\int_{\mathfrak{h}}\left|\left(P\left(\frac{\partial}{\partial h}\right)\Phi\right)(h)\right|\mathrm{d}h.
\end{aligned}$$

因为 $P\left(\frac{\partial}{\partial h}\right)\Phi$ 在 $\mathfrak{h}$ 上可积，所以 $K_t^\phi\in \mathrm{L}_1(G)$.

再计算 K_t^ϕ 的 Fourier 系数，则有

$$\begin{aligned}
&\int_G K_t^\phi(x)\,\overline{\chi_\lambda(x)}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{|W|\cdot|Q|}\int_Q K_t^\phi(\exp h)\,\overline{\chi_\lambda(\exp h)}\,|D(h)|^2\mathrm{d}h.
\end{aligned}$$

因为 $\chi_\lambda(\exp h)$是 T 上的三角多项式，所以有

$$\chi_\lambda(\exp(h+k)) = \chi_\lambda(\exp h)$$

对一切 $h\in\mathfrak{h}$ 和 $k\in\Lambda$ 成立. 又由命题1.16，有

$$\chi_\lambda(\exp h) = D_\lambda(h)/D(h),$$

所以可得

$$K_t^\dagger(\exp h)\,\overline{\chi_\lambda(\exp h)}\,|D(h)|^2 = \frac{(-\mathrm{i})^m |Q|}{P(\delta)(2\pi)^{\frac{1}{2}r}} \Pi\left\{\left(P\left(\frac{\partial}{\partial h}\right)\Phi_t\right)(\cdot)\,\overline{D_\lambda(\cdot)}\right\}(\exp h),$$

将上式代入上面积分等式的右端，就得到

$$\int_G K_t^\dagger(x)\,\overline{\chi_\lambda(x)}\mathrm{d}x = \frac{(-\mathrm{i})^m}{|W|P(\delta)(2\pi)^{\frac{1}{2}r}} \int_{\mathfrak{h}} \left(P\left(\frac{\partial}{\partial h}\right)\Phi_t\right)(h)\,\overline{D_\lambda(h)}\mathrm{d}h.$$

因为上式左端被积函数关于 Weyl 群是对称的，且 Weyl 群又是 $\mathfrak{h}$ 上的正交变换，所以

$$\left(P\left(\frac{\partial}{\partial h}\right)\Phi_t(h)\right)\det\sigma \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\sigma(\lambda+\delta),h)}$$

在 $\mathfrak{h}$ 上的积分与 σ 无关. 这就得到

$$\begin{aligned}\int_G K_t^\dagger(x)\,\overline{\chi_\lambda(x)}\mathrm{d}x &= \frac{(-\mathrm{i})^m}{P(\delta)(2\pi)^{\frac{1}{2}r}} \int_{\mathfrak{h}} \left(P\left(\frac{\partial}{\partial h}\right)\Phi_t\right)(h)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\lambda+\delta,h)}\mathrm{d}h \\ &= \frac{P(\lambda+\delta)}{P(\delta)(2\pi)^{\frac{1}{2}r}} \int_{\mathfrak{h}} \Phi_t(h)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\lambda+\delta,h)}\mathrm{d}h \\ &= \phi(t(\lambda+\delta))d_\lambda.\end{aligned}$$

这就完成了定理的证明. ▎

现在介绍 Harish-Chandra 的一个公式，其具体证明可见参考文献[48]，这个公式是

$$\chi_\lambda(\exp h)D_0(h) = \mathrm{i}^m d_\lambda \int_G \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\lambda+\delta,x\cdot h)}\mathrm{d}x, \tag{2.23}$$

特别当 $\lambda=0$时，可得

$$D_0(h) = \mathrm{i}^m \int_G \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\delta,x\cdot h)}\mathrm{d}x. \tag{2.24}$$

另一方面,(2.23)式又对任意的 $h\in\mathfrak{h}$ 和 $\lambda+\delta\in\mathfrak{h}^*$ 成立. 其中 $x\cdot h$ 是 $\mathrm{Ad}x(h)$ 的简写.

用(2.23)式来计算 $K_t^\sharp(x)$ 的 Fourier 系数,可得

$$\begin{aligned}
&\int_G K_t^\sharp(x)\,\overline{\chi_\lambda(x)}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{(-\mathrm{i})^m}{|W|P(\delta)(2\pi)^{\frac{1}{2}r}}\int_{\mathfrak{h}}\left(P\left(\frac{\partial}{\partial h}\right)\Phi_t(n)\right)\overline{D_\lambda(h)}\,\mathrm{d}h \\
&= \frac{(-\mathrm{i})^m}{|W|P(\delta)(2\pi)^{\frac{1}{2}r}} \\
&\quad\times\int_{\mathfrak{h}}\left(P\left(\frac{\partial}{\partial h}\right)\Phi_t\right)(h)P(h)\,\overline{\chi_\lambda(\exp h)}\cdot\overline{D_0(h)}\,\mathrm{d}h \\
&= \frac{(-1)^m d_\lambda}{|W|P(\delta)(2\pi)^{\frac{1}{2}r}} \\
&\quad\times\int_{\mathfrak{h}}\left(P\left(\frac{\partial}{\partial h}\right)\Phi_t\right)(h)P(h)\int_G \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\lambda+\delta,x\cdot h)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}h \\
&= \frac{d_\lambda}{|W|P(\delta)(2\pi)^{\frac{1}{2}r}} \\
&\quad\times\int_{\mathfrak{h}}\Phi_t(h)P\left(\frac{\partial}{\partial h}\right)\left\{\int_G P(h)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\lambda+\delta,x\cdot h)}\,\mathrm{d}x\right\}\mathrm{d}h \\
&= \phi(t(\lambda+\delta))d_\lambda.
\end{aligned}$$

由此可得

$$\begin{aligned}
\phi(t(\lambda+\delta)) &= A_G\int_{\mathfrak{h}}\Phi_t(h)P\left(\frac{\partial}{\partial h}\right) \\
&\qquad\times\left\{\int_G P(h)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\lambda+\delta,x\cdot h)}\,\mathrm{d}x\right\}\mathrm{d}h \\
&= A_G\int_{\mathfrak{h}}\Phi_t(h)P\left(\frac{\partial}{\partial h}\right) \\
&\qquad\times\left\{\int_G P(h)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(x^{-1}\cdot(\lambda+\delta),h)}\,\mathrm{d}x\right\}\mathrm{d}h \\
&= A_G\int_{\mathfrak{h}}\Phi_t(h)P\left(\frac{\partial}{\partial h}\right) \\
&\qquad\times\left\{\int_G P(h)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(x\cdot(\lambda+\delta),h)}\,\mathrm{d}x\right\}\mathrm{d}h. \qquad (2.25)
\end{aligned}$$

其中，$A_G=1/(|W|P(\delta)(2\pi)^{\frac{1}{2}r})$.

现在设

$$F(Y,h)=P\left(\frac{\partial}{\partial h}\right)\left\{\int_G P(h)e^{-i(x\cdot Y,h)}dx\right\},$$

利用 Haar 积分的性质，可得

$$F(y\cdot Y,h)=F(Y,h)$$

对任意固定的 $h\in\mathfrak{h}$ 及一切 $y\in G$、$Y\in\mathfrak{g}$ 均成立. 这就是说，$F(Y,h)$对每个取定的 $h\in\mathfrak{h}$ 是 $Y\in\mathfrak{g}$ 的中心函数. 另一方面，因为 Φ 是 Weyl 群对称的函数，从而 ϕ 也是 Weyl 群对称的函数，因此 ϕ 可自然地延拓为 $\mathfrak{g}$ 上的中心函数，从而(2.25)式就等于

$$\phi(tX)=\frac{1}{|W|P(\delta)(2\pi)^{\frac{1}{2}r}}\int_{\mathfrak{h}}\Phi_t(h)F(X,h)dh, \tag{2.26}$$

对一切 $X\in\mathfrak{g}$ 成立.

利用上面的结果可得另一种 Poisson 求和公式.

定理 2.6 设 ϕ、Φ 和 Φ_t 与定理2.5中的相同，$J_t^\phi(x)$是 G 上的中心函数，它定义为

$$J_t^\phi(\exp h)=\frac{(-1)^m|Q|}{P(\delta)(2\pi)^{\frac{1}{2}r}}\times\prod\left\{\left(P\left(\frac{\partial}{\partial h}\right)\Phi_t\right)(\cdot)P(\cdot)^{-1}\right\}(\exp h),$$

则 $J_t^\phi(x)\in L_I(G)$，且它的 Fourier 级数是

$$J_t^\phi(x)\sim\sum_{\lambda\in\hat{G}}\int_G\phi(t(\lambda+\delta-x\cdot\delta))dxd_\lambda\chi_\lambda(x).$$

证明 首先指出，构造 $J_t^\phi(\exp h)$的 $\mathfrak{h}$ 上的函数可表示成

$$\left(P\left(\frac{\partial}{\partial h}\right)\Phi_t\right)(h)P(h)^{-1}=\left(P\left(\frac{\partial}{\partial h}\right)\Phi_t\right)(h)D(h)^{-1}D_0(h),$$

这就是说，它是由定义 $K_t^\phi(x)$的 $\mathfrak{h}$ 上的函数$\left(P\left(\frac{\partial}{\partial h}\right)\Phi_t\right)(h)\times D(h)^{-1}$乘以函数 $D_0(h)$而得到的.

更一般地,自然可考虑 $\mathfrak{h}$ 上的函数

$$\left(P\left(\frac{\partial}{\partial h}\right)\Phi_t\right)(h)D(h)^{-1}D_0(h)^s,$$

其中 $s=0,1,2,\cdots$. 而当 $s=0,1$时,就是定理2.5和定理2.6中的函数.

用(2.16)式的映射 Π,它就可定义 G 上的中心函数 $J_t^{\phi,s}(x)$, $s=1,2,\cdots$. 使得 $J_t^{\phi,s}(x)$在 Cartan 子群 T 上的值为

$$J_t^{\phi,s}(\exp h)=\prod\left\{\left(P\left(\frac{\partial}{\partial h}\right)\Phi_t\right)(\cdot)D(\cdot)^{-1}D_0(\cdot)^s\right\}(\exp h),$$

而 $J_t^{\phi,s}(x)$的 Fourier 级数则是

$$J_t^{\phi,s}(x)\sim\sum_{\lambda\in\hat{G}}\int_G\cdots\int_G\phi(t(\lambda+\delta-y_1\cdot\delta-\cdots$$
$$-y_s\cdot\delta))\mathrm{d}y_1\cdots\mathrm{d}y_s d_\lambda\chi_\lambda(x).$$

现在来证明定理,注意到

$$|D_0(h)|\leqslant 1,$$

所以 $J_t^\phi(x)$的可积性的证明与定理2.5中的证明完全相同.再计算 $J_t^\phi(x)$的 Fourier 系数,则有

$$\int_G J_t^\phi(x)\,\overline{\chi_\lambda(x)}\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{|W|\cdot|Q|}\int_Q J_t^\phi(\exp h)\,\overline{\chi_\lambda(\exp h)}\,|D(h)|^2\mathrm{d}h$$
$$=(-1)^m A_G\int_{\mathfrak{h}}\left(P\left(\frac{\partial}{\partial h}\right)\Phi_t\right)(h)P(h)^{-1}$$
$$\times\overline{\chi_\lambda(\exp h)}\,|D(h)|^2\mathrm{d}h$$
$$=(-1)^m A_G\int_{\mathfrak{h}}\left(P\left(\frac{\partial}{\partial h}\right)\Phi_t\right)(h)P(h)$$
$$\times\overline{\chi_\lambda(\exp h)}\cdot\overline{D_0(h)}D_0(h)\mathrm{d}h. \tag{2.27}$$

将(2.23)和(2.24)式代入(2.27)式中,并用 G 上的 Haar 积分性质将它化为 $F(X,h)$的积分,得

$$\int_G J_t^\phi(x)\,\overline{\chi_\lambda(x)}\mathrm{d}x$$

$$
\begin{aligned}
&= (-1)^m A_G d_\lambda \int_{\mathfrak{h}} \int_G \int_G \left(P\left(\frac{\partial}{\partial h} \right) \Phi_t \right)(h) \\
&\quad \times P(h) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\lambda+\delta, x\cdot h)+\mathrm{i}(\delta, y\cdot h)} \mathrm{d}x \mathrm{d}y \mathrm{d}h \\
&= (-1)^m A_G d_\lambda \int_G \int_{\mathfrak{h}} \int_G \left(P\left(\frac{\partial}{\partial h} \right) \Phi_t \right)(h) \\
&\quad \times P(h) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(x\cdot(\lambda+\delta-y\cdot\delta), h)} \mathrm{d}x \mathrm{d}h \mathrm{d}y \\
&= A_G d_\lambda \int_G \int_{\mathfrak{h}} \Phi_t(h) P\left(\frac{\partial}{\partial h} \right) \\
&\quad \times \left\{ \int_G P(h) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(x\cdot(\lambda+\delta-y\cdot\delta), h)} \mathrm{d}x \right\} \mathrm{d}h \mathrm{d}y \\
&= A_G d_\lambda \int_G \int_{\mathfrak{h}} \Phi_t(h) \\
&\quad \times F(\lambda+\delta-y\cdot\delta, h) \mathrm{d}h \\
&= d_\lambda \int_G \phi(t(\lambda+\delta-x\cdot\delta)) \mathrm{d}x,
\end{aligned}
$$

这就完成了定理的证明.　　▌

2.2.2　径向函数的 Poisson 求和公式

在定理2.5和定理2.6中，若取 $\Phi(h)$ 为 $\mathfrak{h}$ 上的径向函数，则 $\phi(h)$ 也是 $\mathfrak{h}$ 上的径向函数，这就得到了 $\mathfrak{h}$ 上的径向函数的 Poisson 求和公式. 在本节中，从另一个角度来讨论 $\mathfrak{h}$ 上的径向函数的 Poisson 求和公式.

按照 Bochner 的方法设 $\phi_0(t)$ 是定义在 $[0, +\infty)$ 上并满足一定的可积性条件，令

$$
\begin{aligned}
H_s^\phi(c) &= \frac{1}{c} \int_0^\infty \phi_0\left(\frac{u}{c} \right) u^{s+1} J_s(u) \mathrm{d}u \\
&= c^{s+1} \int_0^\infty \phi_0(u) u^{s+1} J_s(cu) \mathrm{d}u,
\end{aligned}
\tag{2.28}
$$

再令

$$
W_s^\phi(c) = H_s^\phi(c) / c^{2s+1}, \tag{2.29}
$$

其中 $J_s(u)$ 是 s 阶的 Bessel 函数.

引理 2.6　设 ϕ_0 是 $[0, +\infty)$ 具有直到 $\left[s+\frac{3}{2} \right]$ 阶连续导数的

函数，且存在正数 $A>0$ 和 $\varepsilon>0$，使：

(1) 对 $k=0,1,\cdots,\left[s+\frac{3}{2}\right]$，$\phi_0^{(k)}$ 表示 ϕ_0 的 k 阶导数，则有

$$\int_0^\infty \left|\phi_0^{(k)}(u)u^{s+\frac{1}{2}}\right|\mathrm{d}u \leqslant A.$$

(2) 当 $k=\left[s+\frac{3}{2}\right]$ 时有

$$\int_0^\infty \left|\phi_0^{(k)}\left(u+\frac{\pi}{c}\right)-\phi_0^{(k)}(u)\right|u^{s+\frac{1}{2}}\mathrm{d}u$$

$$\leqslant A\left(\frac{1}{c}\right)^{s+\frac{3}{2}+\varepsilon-\left[s+\frac{3}{2}\right]},$$

则可得(2.28)式中的 $H_s^\phi(c)$ 适合

$$H_s^\phi(c)=O(c^{-(1+\varepsilon)}),\quad (c\to+\infty),$$

$$H_s^\phi(c)=O(c^{s+\frac{1}{2}}),\quad (c\to 0),$$

其中 $s+1$ 为正的整数或半整数，$[x]$ 表示不超过 x 的最大整数.

证明 由 Bessel 函数的导数公式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(z^{a+1}\mathrm{J}_{a+1}(z)\right)=z^{a+1}\mathrm{J}_a(z),$$

对(2.28)式的第一个等式分部积分 k 次，可得

$$\begin{aligned}H_s^\phi(c)=&(-1)^k c^{-(k+1)}\int_0^\infty \phi_0^{(k)}\left(\frac{u}{c}\right)u^{s+1}\mathrm{J}_{s+k}(u)\mathrm{d}u\\&+a_1c^{-k}\int_0^\infty \phi_0^{(k-1)}\left(\frac{u}{c}\right)u^{s}\mathrm{J}_{s+k}(u)\mathrm{d}u\\&+\cdots\cdots\\&+a_{k-1}c^{-2}\int_0^\infty \phi_0'\left(\frac{u}{c}\right)u^{s+2-k}\mathrm{J}_{s+k}(u)\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

对上式右端的积分作变量置换 $t=u/c$，再将 t 换成 u，得到

$$\begin{aligned}H_s^\phi(c)=c^{s+1-k}\Big\{&(-1)^k\int_0^\infty \phi_0^{(k)}(u)u^{s+1}\mathrm{J}_{s+k}(cu)\mathrm{d}u\\&+a_1\int_0^\infty \phi_0^{(k-1)}(u)u^{s}\mathrm{J}_{s+k}(cu)\mathrm{d}u\\&+\cdots\cdots\end{aligned}$$

$$+ a_{k-1}\int_0^{\infty}\phi_0'(u)u^{s+2-k}\mathrm{J}_{s+k}(cu)\mathrm{d}u\Big\}$$

$$= I_1 + I_2,$$

其中 $a_1,\cdots,a_{k-1}$ 是仅依赖于 s 和 k 的常数，

$$I_1 = c^{s+1-k}\Big\{(-1)^k\int_0^{A_0/c}\phi_0^{(k)}(u)u^{s+1}\mathrm{J}_{s+k}(cu)\mathrm{d}u$$

$$+ a_1\int_0^{A_0/c}\phi_0^{(k-1)}(u)u^{s}\mathrm{J}_{s+k}(cu)\mathrm{d}u$$

$$+ \cdots\cdots$$

$$+ a_{k-1}\int_0^{A_0/c}\phi_0'(u)u^{s+2-k}\mathrm{J}_{s+k}(cu)\mathrm{d}u\Big\};$$

$$I_2 = c^{s+1-k}\Big\{(-1)^k\int_{A_0/c}^{\infty}\phi_0^{(k)}(u)u^{s+1}\mathrm{J}_{s+k}(cu)\mathrm{d}u$$

$$+ a_1\int_{A_0/c}^{\infty}\phi_0^{(k-1)}(u)u^{s}\mathrm{J}_{s+k}(cu)\mathrm{d}u$$

$$+ \cdots\cdots$$

$$+ a_{k-1}\int_{A_0/c}^{\infty}\phi_0'(u)u^{s+2-k}\mathrm{J}_{s+k}(cu)\mathrm{d}u\Big\},$$

式中 $A_0\geqslant 2\pi$ 为正常数，$c>0$，$1\leqslant k\leqslant\left[s+\frac{3}{2}\right]$.

估计 I_1：因为 $\phi_0'(u),\cdots,\phi_0^{(k)}(u)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，又因为 $s+k\geqslant\frac{1}{2}$，$\mathrm{J}_{s+k}(u)$ 也在 $[0,+\infty)$ 上连续，所以存在由 s、k 及 ϕ_0 决定的正数 A_1，使得

$$|I_1|\leqslant A_1c^{-2}.$$

估计 I_2：这要用到 Bessel 函数在 $z\to+\infty$ 时的渐近估计，它可表示成当 $z\geqslant A_0$ 时，有

$$J_{s+k}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos\left(z - \frac{1}{2}(s+k)\pi - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$+ \frac{b_0}{z\sqrt{z}}\sin\left(z - \frac{1}{2}(s+k)\pi - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$+ O(z^{-5/2}).$$

用上式估计 I_2，可得

$$\begin{aligned}
I_2 = & c^{s+1-k-\frac{1}{2}} \\
& \times \left\{(-1)^k \int_{A_0/c}^{\infty} \phi_0^{(k)}(u) u^{s+\frac{1}{2}} \cos\left(cu - \frac{1}{2}(s+k)\pi - \frac{\pi}{4}\right) du \right. \\
& + a_1 \int_{A_0/c}^{\infty} \phi_0^{(k-1)}(u) u^{s-\frac{1}{2}} \cos\left(cu - \frac{1}{2}(s+k)\pi - \frac{\pi}{4}\right) du \\
& + \cdots\cdots \\
& \left. + a_{k-1} \int_{A_0/c}^{\infty} \phi_0'(u) u^{s+\frac{3}{2}-k} \cos\left(cu - \frac{1}{2}(s+k)\pi - \frac{\pi}{4}\right) du \right\} \\
& + b_0 c^{s+1-k-3/2} \\
& \times \left\{(-1)^k \int_{A_0/c}^{\infty} \phi_0^{(k)}(u) u^{s-1/2} \sin\left(cu - \frac{1}{2}(s+k)\pi - \frac{\pi}{4}\right) du \right. \\
& + a_1 \int_{A_0/c}^{\infty} \phi_0^{(k-1)}(u) u^{s-3/2} \sin\left(cu - \frac{1}{2}(s+k)\pi - \frac{\pi}{4}\right) du \\
& + \cdots\cdots \\
& \left. + a_{k-1} \int_{A_0/c}^{\infty} \phi_0'(u) u^{s+1/2-k} \sin\left(cu - \frac{1}{2}(s+k)\pi - \frac{\pi}{4}\right) du \right\} \\
& + c^{s+1-k-1-\eta} \left\{ \int_{A_0/c}^{\infty} (-1)^k \phi_0^{(k)}(u) u^{s-\eta} O(1) du \right. \\
& + a_1 \int_{A_0/c}^{\infty} \phi_0^{(k-1)}(u) u^{s-1-\eta} O(1) du \\
& + \cdots\cdots \\
& \left. + a_{k-1} \int_{A_0/c}^{\infty} \phi_0'(u) u^{s+1-k-\eta} O(1) du \right\} \\
= & I_{21} + I_{22} + I_{23}.
\end{aligned}$$

其中 I_{21}是含余弦函数的那些积分项之和，I_{22}是含正弦函数的那些积分项之和，I_{23}是含 $O(1)$的那些积分项之和，$0<\varepsilon<\eta<\frac{1}{2}$. 而当 $u>A_0/c$ 时，有

$$O((cu)^{-3/2}) = c^{-1-\eta}u^{-1-\eta}O(1).$$

在对 I_{21} 和 I_{22} 的估计中要用到

$$\int_{A_0/c}^{\infty} f(u) \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(cu+b)\mathrm{d}u$$

$$= \int_{(A_0-\pi)/c}^{\infty} f(t+\pi/c) \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(c(t+\pi/c)+b)\mathrm{d}t$$

$$= -\int_{(A_0-\pi)/c}^{\infty} f(u+\pi/c) \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(cu+b)\mathrm{d}u$$

$$= -\int_{A_0/c}^{\infty} f(u+\pi/c) \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(cu+b)\mathrm{d}u$$

$$+ \int_{A_0/c}^{(A_0+\pi)/c} f(u) \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(cu+b)\mathrm{d}u.$$

由此即得到

$$2I_{21} = c^{s+1-k-\frac{1}{2}}$$

$$\times \Big\{(-1)^k \int_{A_0/c}^{\infty} \phi_0^{(k)}(u)\big(u^{s+\frac{1}{2}} - (u+\pi/c)^{s+\frac{1}{2}}\big)\cos(cu-b)\mathrm{d}u$$

$$+ a_1 \int_{A_0/c}^{\infty} \phi_0^{(k-1)}(u)\big(u^{s-\frac{1}{2}} - (u+\pi/c)^{s-\frac{1}{2}}\big)\cos(cu-b)\mathrm{d}u$$

$$+ \cdots\cdots$$

$$+ a_{k-1} \int_{A_0/c}^{\infty} \phi_0'(u)\big(u^{s+\frac{3}{2}-k} - (u+\pi/c)^{s+\frac{3}{2}-k}\big)\cos(cu-b)\mathrm{d}u\Big\}$$

$$+ c^{s+1-k-\frac{1}{2}}$$

$$\times \Big\{(-1)^k \int_{A_0/c}^{\infty} \big(\phi_0^{(k)}(u) - \phi_0^{(k)}(u+\pi/c)\big)(u+\pi/c)^{s+\frac{1}{2}}$$

$$\times \cos(cu-b)\mathrm{d}u$$

$$+ a_1 \int_{A_0/c}^{\infty} \big(\phi_0^{(k-1)}(u) - \phi_0^{(k-1)}(u+\pi/c)\big)(u+\pi/c)^{s-\frac{1}{2}}$$

$$\times \cos(cu-b)\mathrm{d}u$$

$$+ \cdots\cdots$$

$$+ a_{k-1}\int_{A_0/c}^{\infty}(\phi_0'(u)-\phi_0'(u+\pi/c))(u+\pi/c)^{s+\frac{3}{2}-k}\cos(cu-b)\mathrm{d}u$$

$$+ c^{s+1-k-\frac{1}{2}}$$

$$\times\Big\{(-1)^k\int_{A_0/c}^{(A_0+\pi)/c}\phi_0^{(k)}(u)u^{s+\frac{1}{2}}\cos(cu-b)\mathrm{d}u$$

$$+ a_1\int_{A_0/c}^{(A_0+\pi)/c}\phi_0^{(k-1)}(u)u^{s-\frac{1}{2}}\cos(cu-b)\mathrm{d}u$$

$$+ \cdots\cdots$$

$$+ a_{k-1}\int_{A_0/c}^{(A_0+\pi)/c}\phi_0'(u)u^{s+\frac{3}{2}-k}\cos(cu-b)\mathrm{d}u\Big\}$$

$$= J_1 + J_2 + J_3,$$

其中 J_1是含有$(u^a-(u+\pi/c)^a)$的函数因子的积分项之和，J_2是含有 $(\phi^{(a)}(u)-\phi^{(a)}(u+\pi/c))$ 的函数因子的积分项之和，J_3是在$[A_0/c,(A_0+\pi)/c]$上积分的积分项之和，$b=\frac{1}{2}(s+k)\pi+\pi/4$.

J_1中各项积分的因子$(u^a-(u+\pi/c)^a)$的指数a取值为

$$a=s+\frac{3}{2}-k,\ s+\frac{3}{2}-k+1,\ \cdots,\ s+\frac{1}{2}.$$

而正整数 $k\leqslant\left[s+\frac{3}{2}\right]$，从而恒有 $a\geqslant 0$. 于是可得

$$\begin{aligned}u^a-(u+\pi/c)^a &= u^a(1-(1+\pi/cu)^a)\\ &= -a\pi u^{a-1}c^{-1}\left(1+O\left(\frac{1}{cu}\right)\right)\\ &= -a\pi u^{a-\frac{1}{2}-\xi}c^{-\frac{1}{2}-\eta}O(1),\end{aligned}$$

其中$0<\eta<\xi<\frac{1}{2}$.

将以上的估计用于 J_1的各个积分，由引理的条件，J_1的各个积分中的被积函数均在$[0,+\infty)$上可积，从而可得

$$|J_1|\leqslant B_1c^{s+1-k-1-\varepsilon}.$$

而由引理的条件易得

$$|J_2|\leqslant B_2c^{s+1-k-\frac{1}{2}+\left[s+\frac{3}{2}\right]-s-\frac{3}{2}-\varepsilon}.$$

由 I_1 的估计又可得

$$|J_3| \leqslant B_3 c^{-2},$$

所以取 $k=[s+3/2]$，就得到了

$$|I_{21}| = O(c^{-(1+\varepsilon)}) \quad (c \to +\infty).$$

用与估计 I_{21} 同样的方法，可得

$$|I_{22}| = O(c^{-(1+\varepsilon)}) \quad (c \to +\infty),$$

$$|I_{23}| = O(c^{-(1+\varepsilon)}) \quad (c \to +\infty).$$

这就得到

$$|I_2| = O(c^{-(1+\varepsilon)}) \quad (c \to +\infty).$$

这也就是

$$H_s^\phi(c) = O(c^{-(1+\varepsilon)}) \quad (c \to +\infty).$$

当 $c\to 0$ 时，将(2.28)式第二个等式右端的积分分成下面两部分：

$$\begin{aligned} &c^{s+1}\int_0^\infty \phi_0(u)u^{s+1}J_s(cu)\mathrm{d}u \\ &= c^{s+1}\left\{\int_0^{A_0/c} \phi_0(u)u^{s+1}J_s(cu)\mathrm{d}u \right. \\ &\qquad \left. + \int_{A_0/c}^\infty \phi_0(u)u^{s+1}J_s(cu)\mathrm{d}u\right\} \\ &= I_1 + I_2. \end{aligned}$$

由 Bessel 函数的级数表达式

$$\mathrm{J}_s(z) = \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{k!}\frac{1}{\Gamma(s+k+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+s},$$

当 $s=-\dfrac{1}{2}$ 时，有

$$\begin{aligned} I_1 &= c^{s+1}\int_0^{A_0/c} \phi_0(u)u^{s+1}\sqrt{\frac{2}{\pi cu}}\cos(cu)\mathrm{d}u \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}c^{s+\frac{1}{2}}\int_0^{A_0/c} \phi_0(u)u^{s+\frac{1}{2}}\cos(cu)\mathrm{d}u, \end{aligned}$$

可得 $s=-\dfrac{1}{2}$ 时

$$I_1 = O(c^{s+\frac{1}{2}}) \quad (c \to 0).$$

而当 $s=0,\dfrac{1}{2},1,3/2,\cdots$时，$J_s(cu)$在$[0,+\infty)$上有界，从而有

$$|I_1| \leqslant Bc^{s+1}\int_0^{A_0/c} |\phi_0(u)u^{s+1}|\mathrm{d}u$$

$$\leqslant BA_0c^{s+\frac{1}{2}}\int_0^{A_0/c} |\phi_0(u)u^{s+\frac{1}{2}}|\mathrm{d}u,$$

其中 B 为正常数，由引理的条件可得当 $s\geqslant 0$时，有

$$I_1 = O(c^{s+\frac{1}{2}}) \quad (c \to 0).$$

对 I_2的估计，由 $cu\geqslant A_0$时

$$J_s(cu) = O\left((cu)^{-\frac{1}{2}}\right),$$

即得

$$|I_2| \leqslant Bc^{s+\frac{1}{2}}\int_{A_0/c}^{\infty} |\phi_0(u)u^{s+\frac{1}{2}}|\mathrm{d}u,$$

于是得到

$$I_2 = O(c^{s+\frac{1}{2}}) \quad (c \to 0).$$

因此，当 $s+1$为正的整数或半整数时，有

$$H_s^{\phi}(c) = I_1 + I_2 = O(c^{s+\frac{1}{2}}) \quad (c \to 0).$$

这就完成了引理2.6的证明. ▌

利用以上引理，可得下面的径向函数的 Poisson 求和公式，其中 G 是秩为 r 的 n 维紧致李群.

定理 2.7 设 $\phi_0(u)$满足引理2.6中 $s=\dfrac{1}{2}n-1$的条件，$\phi(h)$是 $\Phi(h)$按(2.19)式定义的 Fourier 变换，且

$$\phi(h) = \phi_0(|h|),$$

则有：

(1) $\Phi(h)=W^{\phi}_{\frac{1}{2}r-1}(|h|)$，其中 $W^{\phi}_{\frac{1}{2}r-1}(|h|)$由(2.29)式定义；

(2) 设 $K_t^{\phi}(x)$是 $\Phi(h)=W^{\phi}_{\frac{1}{2}r-1}(|h|)$按照定理2.5定义的 G 上的中心函数，则有

$$\left(P\left(\frac{\partial}{\partial h}\right)\Phi_t\right)(h) = (-1)^m t^{-n}P(h)W^{\phi}_{\frac{1}{2}n-1}(t^{-1}|h|).$$

证明　由 Bessel 函数的导数公式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(z^{-s}\mathrm{J}_s(z)) = -z^{-s}\mathrm{J}_{s+1}(z)$$

可以得到

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}c}W_s^{\phi}(c) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}c}\left(\int_0^{\infty}\phi_0(u)u^{2s+1}(cu)^{-s}\mathrm{J}_s(cu)\mathrm{d}u\right)\\ &= -\int_0^{\infty}\phi_0(u)u^{2s+1}\cdot u\cdot(cu)^{-s}\mathrm{J}_{s+1}(cu)\mathrm{d}u\\ &= -c^{-s}\int_0^{\infty}\phi_0(u)u^{s+2}\mathrm{J}_{s+1}(cu)\mathrm{d}u\\ &= -H_{s+1}^{\phi}(c)/c^{2s+2} = -cW_{s+1}^{\phi}(c),\end{aligned}$$

继续求导,由归纳法可证得递推公式

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}c}\right)^k W_s^{\phi}(c)\\ &= \sum_{p=0}^{\left[\frac{1}{2}k\right]}(-1)^{k+p}(2p-1)!!\binom{k}{2p}W_{s+k-p}^{\phi}(c)c^{k-2p},\end{aligned}$$

其中$(-1)!!=1$, $\binom{n}{p}=n!/(p!(n-p)!)$. 将上面的导数公式用于以下的求导,可得

$$\begin{aligned}&P\left(\frac{\partial}{\partial h}\right)\{W_{\frac{1}{2}r-1}^{\phi}(t^{-1}|h|)\}\\ &= \sum_{s=0}^{\left[\frac{1}{2}m\right]}W_{\frac{1}{2}n-1-s}^{\phi}(t^{-1}|h|)(-t^{-2})^{m-s}A(s),\end{aligned}\tag{2.30}$$

其中 $A(s)$是 h 的 $m-2s$ 次的齐次多项式, 特别地,有 $A(0)=P(h)$.

由(2.30)式左端 $P\left(\frac{\partial}{\partial h}\right)$是 Weyl 群反对称的微分算子,所以(2.30)的右端是 Weyl 群反对称的函数. 又因为对不同的 s,(2.30)式中的求和项彼此线性无关,从而(2.30)式中的每一项都是 Weyl 群反对称的函数,于是必有多项式 $A(s)$被 $P(h)$整除. 而当$s\geqslant1$时,$A(s)$的次数$\leqslant m-2$,其中 m 是 $P(h)$的次数,从而当$s\geqslant1$时,必有 $A(s)\equiv0$,即

$$P\left(\frac{\partial}{\partial h}\right)\{W^{\phi}_{\frac{1}{2}r-1}(t^{-1}|h|)\}$$
$$=(-1)^m P(h)t^{-2m}W^{\phi}_{\frac{1}{2}n-1}(t^{-1}|h|).$$

再由

$$\Phi_t(h)=t^{-r}W^{\phi}_{\frac{1}{2}r-1}(t^{-1}|h|).$$

这就证明了定理的(2).

至于定理的(1),由于引理2.6 $W^{\phi}_{\frac{1}{2}r-1}(|h|)$可积,由 Fourier 变换的唯一性即可得证. ▌

2.2.3 Abel—龚核与 Riesz—龚核

在定理2.7中,取 $\phi_0(u)$为

$$\phi_0(u)=e^{-u^b},\ \mathrm{Re}b>0,$$

就得到广义的 Abel—龚核 $A_t^b(x)$;而在定理2.7中取 $\phi_0(u)$为

$$\phi_0(u)=(1-u^a)_+^{\delta},\ \mathrm{Re}a>0,\mathrm{Re}\delta>0,$$

就得到广义的 Riesz—龚核 $K_t^{a,\delta}(x)$.

特别地,Abel—龚核 $A_t(x)$,Gauss—龚核 $A_t^2(x)$和 Riesz—龚核 $K_t^{\delta}(x)$,它们的 Poisson 求和公式可以更具体地给出来.

定理 2.8 设 G 是秩为 r 的 n 维紧致李群,则 G 上的 Abel—龚核 $A_t(x)$,Gauss—龚核 $A_t^2(x)$和 Riesz—龚核 $K_t^{\delta}(x)$的 Poisson 求和公式是

$$A_t(\exp h)=B_1\Pi\left\{\frac{t}{(t^2+|h|^2)^{\frac{1}{2}(n+1)}}D_0(h)^{-1}\right\}(\exp h),$$

$$A_t^2(\exp h)=B_2\Pi\{t^{-\frac{1}{2}n}e^{-|h|^2/4t}D_0(h)^{-1}\}(\exp h),$$

$$K_t^{\delta}(\exp h)$$
$$=C_{\delta}\Pi\left\{t^{-n}(t^{-1}|h|)^{-\frac{1}{2}n-\delta}J_{\frac{1}{2}n+\delta}(t^{-1}|h|)D_0(h)^{-1}\right\}(\exp h),$$

其中

$$B_1=A_G2^{\frac{1}{2}n}\Gamma\left(\frac{1}{2}(n+1)\right)\Big/\sqrt{\pi},$$

$$B_2=A_G2^{-\frac{1}{2}n},$$
$$C_{\delta}=A_G2^{\delta}\Gamma(\delta+1),$$

$$A_G=(-\mathrm{i})^m|Q|/\left((2\pi)^{\frac{1}{2}r}P(\delta)\right);$$

Π:L($\mathfrak{h}$)→L(T)由(2.16)式定义.

§2.3　Fourier 级数的求和与 Peter-Weyl 定理

通过上节中的 Poisson 求和公式,当 ϕ 和 Φ 适合一定的条件时,就定义了连通紧致李群上可积函数的 Fourier 级数的 ϕ-平均.设 $f\in \mathrm{L}(G)$,f 的 Fourier 级数是

$$f(x)\sim\sum_{\lambda\in\hat{G}}d_\lambda\mathrm{Tr}(\hat{f}_\lambda\rho_\lambda(x)),\tag{2.31}$$

则 f 的 ϕ-平均是

$$S_t^\phi(f,x)=\sum_{\lambda\in\hat{G}}\phi(t(\lambda+\delta))d_\lambda\mathrm{Tr}(\hat{f}_\lambda\rho_\lambda(x)).\tag{2.32}$$

而对于广义的 Abel—龚平均,则只需将(2.32)式中的 $\phi(t(\lambda+\delta))$ 换成

$$\phi(t^{1/b}(\lambda+\delta)),\ b>0,$$

这一参数的变换不影响 ϕ-平均的性质,从而当一般地讨论 $\mathrm{Re}b>0$ 时,仍然采用定理2.7和(2.32)式的形式.

2.3.1　ϕ-平均的收敛性

在讨论连通紧致李群 G 上可积函数 $f\in\mathrm{L}(G)$的 Fourier 级数的 ϕ-平均(2.32)的收敛性质之前,先给出 $f\in\mathrm{L}(G)$的 Lebesgue 点的定义.

为简便起见,对每个 $x\in G$,用 $|x|$ 表示 x 与幺元 e 之间的 Riemann 距离,若 $f\in\mathrm{L}(G)$,$x\in G$ 适合

$$\lim_{t\to0}t^{-n}\int_{|y|<t}|f(xy^{-1})-f(x)|\mathrm{d}y=0,$$

其中$\{|y|<t\}$表示 G 中以幺元 e 为中心、t 为半径的测地球,$\mathrm{d}y$ 是 G 上的规格化 Haar 测度,n 是 G 的实维数,则 x 称为 f 的一个 Lebesgue 点.同经典的情形一样,若 $f\in\mathrm{L}(G)$,则至多除去 G 的一个零测集后,所有 G 的点均为 f 的 Lebesgue 点.特别是,若 f 在 G 上连续,则每个 $x\in G$ 均为 f 的 Lebesgue 点.于是可得 ϕ-平均

的以下性质：

定理 2.9 设 G 是秩为 r 的 n 维紧致李群，$f\in L(G)$. 又设 ϕ、Φ 和 $K_t^\phi(x)$ 如定理2.5中所定义，且 ϕ 与 Φ 适合：

(1) 存在正数 $A>0$ 和 $\varepsilon>0$，使得 ϕ 和 Φ 适合

$$|\phi(h)|\leqslant A\left(\frac{1}{1+|h|}\right)^{n+\varepsilon},$$

$$\left|P(h)^{-1}P\left(\frac{\partial}{\partial h}\right)\Phi(h)\right|\leqslant A\left(\frac{1}{1+|h|}\right)^{n+\varepsilon};$$

(2) $\phi(0)=1$.

则有

$$\begin{aligned}S_t^\phi(f,x)&=K_t^\phi*f(x)\\&=\sum_{\lambda\in\hat{G}}\phi(t(\lambda+\delta))d_\lambda\mathrm{Tr}(\hat{f}_\lambda\rho_\lambda(x))\end{aligned}\tag{2.33}$$

成立. 其右端的级数绝对一致收敛，且当 x 为 f 的 Lebesgue 点以及

$$\int_G|f(xy^{-1})|\cdot|D(y)|^{-1}\mathrm{d}y<+\infty$$

时，有

$$\lim_{t\to0}S_t^\phi(f,x)=f(x),$$

从而 $S_t^\phi(f,x)$ 几乎处处收敛于 $f(x)$.

证明 由于 $|\chi_\lambda(x)|\leqslant d_\lambda$，所以由

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(\hat{f}_\lambda\rho_\lambda(x))&=\chi_\lambda*f(x)\\&=\int_G\chi_\lambda(y)f(xy^{-1})\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

可得

$$\begin{aligned}|\mathrm{Tr}(\hat{f}_\lambda\rho_\lambda(x))|&\leqslant d_\lambda\int_G|f(xy^{-1})|\mathrm{d}y\\&=d_\lambda\|f\|_1.\end{aligned}$$

又由于存在正数 A_0，使得

$$d_\lambda\leqslant A_0|\lambda+\delta|^m,\ \forall\,\lambda\in\hat{G},$$

从而可得

$$\sum_{\lambda\in\hat{G}} |\phi(t(\lambda+\delta))|d_\lambda|\mathrm{Tr}(\hat{f}_\lambda\rho_\lambda(x))|$$

$$\leqslant A_0\sum_{\lambda\in\hat{G}} |\phi(t(\lambda+\delta))|\cdot|\lambda+\delta|^{2m}$$

$$\leqslant t^{-2m}\sum_{\lambda\in\hat{G}} A_0 A\left(\frac{1}{1+t|\lambda+\delta|}\right)^{r+\varepsilon}$$

$$\leqslant t^{-2m}A_0 A\int_{\mathfrak{h}}\left(\frac{1}{1+t|h|}\right)^{r+\varepsilon}\mathrm{d}h$$

$$=t^{-n}A_0 A\int_{\mathfrak{h}}\left(\frac{1}{1+|h|}\right)^{r+\varepsilon}\mathrm{d}h<+\infty.$$

这就证明了级数绝对一致收敛.

当 x 是 f 的 Lebesgue 点时，有

$$S_t^{\phi}(f,x)-f(x)$$

$$=\int_G K_t^{\phi}(y)f(xy^{-1})\mathrm{d}y-f(x)$$

$$=\int_G K_t^{\phi}(y)(f(xy^{-1})-f(x))\mathrm{d}y$$

$$+(\phi(t\delta)-1)f(x).$$

因为 $\phi(0)=1$和 ϕ 连续，所以只需证明

$$\lim_{t\to 0}\int_G K_t^{\phi}(y)(f(xy^{-1})-f(x))\mathrm{d}y=0.\qquad(2.34)$$

用引理1.20定义的投影算子 Π_1，因为 $K_t^{\phi}(x)$是 G 上的中心函数，故可得

$$\int_G K_t^{\phi}(y)f(xy^{-1})\mathrm{d}y=\int_G K_t^{\phi}(y)(\Pi_1 f_x)(y^{-1})\mathrm{d}y,$$

其中 $f_x(y)=f(xy)$. 子是可用 G 上中心函数的积分公式，得到

$$\int_G K_t^{\phi}(y)(f(xy^{-1})-f(x))\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{|W|\cdot|Q|}\int_Q K_t^{\phi}(\exp h)$$

$$\times((\Pi_1 f_x)(\exp h)-f(x))|D(h)|^2\mathrm{d}h.$$

再由定理2.5，就得到

$$\int_G K_t^\sharp(y)(f(xy^{-1}) - f(x))\mathrm{d}x$$

$$= A_G\int_{\mathfrak{h}}\left(P\left(\frac{\partial}{\partial h}\right)\Phi_t\right)(h)\,\overline{D(h)}$$

$$\times\{(\Pi_1 f_x)(\exp h) - f(x)\}\mathrm{d}h.$$

现在记

$$\Psi(h) = \left(P\left(\frac{\partial}{\partial h}\right)\Phi\right)(h)\Big/P(h), \tag{2.35}$$

则有

$$\left(P\left(\frac{\partial}{\partial h}\right)\Phi_t\right)(h) = t^{-n}P(h)\Psi(t^{-1}h). \tag{2.36}$$

而由 Π_1的定义有

$$(\Pi_1 f_x)(e) = (\Pi_1 f_x)(\exp 0) = f(x). \tag{2.37}$$

其次,易见存在仅依赖于 G 的正数 a_0和 a_1,使当$|h|<a_0$时,恒有

$$1 \leqslant \mathrm{i}^m P(h)/D(h) \leqslant a_1,\ \forall\ |h| \leqslant a_0. \tag{2.38}$$

利用以上各式来估计(2.34)式左端的积分,就得到

$$\left|\int_G K_t^\sharp(y)(f(xy^{-1}) - f(x))\mathrm{d}x\right|$$

$$\leqslant A_G\int_{\mathfrak{h}}\left|\left(P\left(\frac{\partial}{\partial h}\right)\Phi_t\right)(h)\,\overline{D(h)}\right|$$

$$\times |(\Pi_1 f_x)(\exp h) - f(x)|\mathrm{d}h$$

$$= A_G\left(\int_{|h|\leqslant t} + \int_{t\leqslant|h|\leqslant a_0} + \int_{|h|\geqslant a_0}\right)$$

$$= I_1 + I_2 + I_3.$$

先估计 I_3:由(2.36)式和定理的条件

$$I_3 = A_G\int_{|h|\geqslant a_0} t^{-n}|\Psi(t^{-1}h)P(h)\,\overline{D(h)}$$

$$\times\{(\Pi_1 f_x)(\exp h) - f(x)\}|\mathrm{d}h$$

$$\leqslant A_G A t^{-n}\int_{|h|\geqslant a_0}\left(\frac{t}{t+|h|}\right)^{n+\varepsilon}|P(h)\,\overline{D(h)}$$

$$\times\{(\Pi_1 f_x)(\exp h) - f(x)\}|\mathrm{d}h$$

$$\leqslant A_G A t^{\epsilon}\int_{|h|\geqslant a_0}|h|^{-n-\epsilon}|P(h)\overline{D(h)}$$

$$\times(((\Pi_1 f_x)(\exp h)-f(x))|dh,$$

注意到当 $k\in\Lambda$ 且 $k\neq 0$ 时，有仅依赖于 G 的正数 b_1 和 b_2 存在，使下式成立：

$$b_1|k|\leqslant\sup_{h\in Q}\{|k+h|\}\leqslant b_2|k|,\quad 0\neq k\in\Lambda.\qquad(2.39)$$

此外还有

$$|P(h)|\leqslant|h|^m\prod_{\alpha>0}|\alpha|$$

成立. 由此可得

$$I_3\leqslant B_G t^{\epsilon}\int_Q|D(h)|$$

$$\times|(\Pi_1 f_x)(\exp h)-f(x)|dh$$

$$\leqslant B_G|Q|\cdot|W|t^{\epsilon}$$

$$\times\left\{\int_G|f(xy^{-1})|\cdot|D(y)|^{-1}dy+|f(x)|\right\},$$

其中，因为 $|D(h)|$ 是 T 上的 Weyl 群对称的函数，它唯一定义的 G 上的中心函数记为 $|D(x)|$，则显然有 $|D(x)|^{-1}\in L^2(G)$. 则对几乎所有的 $x\in G$，$f(xy^{-1})|D(y)|^{-1}$ 作为 $y\in G$ 的函数在 G 上可积.

因此在定理的条件下，当 $t\to 0$ 时，就有 $I_3\to 0$.

接着估计 I_1：由(2.38)式，有

$$I_1=A_G\int_{|h|\leqslant t}t^{-n}|\Psi(t^{-1}h)P(h)\overline{D(h)}$$

$$\times(((\Pi_1 f_x)(\exp h)-f(x))|dh$$

$$\leqslant A_G A a_1 t^{-n}\int_{|h|\leqslant t}|(\Pi_1 f_x)(\exp h)-f(x)|$$

$$\times|D(h)|^2dh$$

$$=A_G A a_1|W|\cdot|Q|t^{-n}$$

$$\times\int_{|y|\leqslant t}|f(xy^{-1})-f(x)|dy,$$

由 Lebesgue 点的定义，就得到当 $t\to 0$ 时 $I_1\to 0$.

最后估计 I_2：则有

$$
\begin{aligned}
I_2 \leqslant & A_G a_1 t^{-n}\int_{t\leqslant|h|\leqslant a_0}|\Psi(t^{-1}h)| \\
& \times |(\Pi_1 f_x)(\exp h)-f(x)|\cdot|D(h)|^2 \mathrm{d}h \\
\leqslant & A_G A a_1 t^{\varepsilon}\int_{t\leqslant|h|\leqslant a_0}|h|^{-n-\varepsilon} \\
& \times |(\Pi_1 f_x)(\exp h)-f(x)|\cdot|D(h)|^2 \mathrm{d}h \\
\leqslant & A_G A a_1 t^{\varepsilon}\int_t^{a_0} u^{-n-\varepsilon}u^{r-1} \\
& \times \int_{\Sigma}|(\Pi_1 f_x)(\exp u\sigma)-f(x)|\cdot|D(u\sigma)|^2 \mathrm{d}\sigma\mathrm{d}u \\
= & B_G t^{\varepsilon}\int_t^{a_0} u^{-n-\varepsilon} \\
& \times\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\int_{|y|\leqslant u}|f(xy^{-1})-f(x)|\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}u \\
= & B_G t^{\varepsilon} a_0^{-n-\varepsilon}\int_{|y|\leqslant a_0}|f(xy^{-1})-f(x)|\mathrm{d}y \\
& - B_G t^{\varepsilon} t^{-n-\varepsilon} \\
& \times\int_{|y|\leqslant t}|f(xy^{-1})-f(x)|\mathrm{d}y \\
& + B_G(n+\varepsilon)t^{\varepsilon}\int_t^{a_0} u^{-n-1-\varepsilon} \\
& \times\int_{|y|\leqslant u}|f(xy^{-1})-f(x)|\mathrm{d}y\mathrm{d}u
\end{aligned}
\tag{2.40}
$$

其中 $B_G=A_G A a_1|W|\cdot|Q|$.

在(2.40)式最后一个等式右端的第一项，因为 $t\to 0$ 时 $t^{\varepsilon}\to 0$，所以趋于零. 第二项由于 Lebesgue 点的性质，在 $t\to 0$ 时也趋于零. 对于第三项，则对任意的 $b>0$，存在 $\eta>0$，当 $0<u<\eta$ 时，由于 Lebesgue 点的性质，则得

$$
F(u)=u^{-n}\int_{|y|<u}|f(xy^{-1})-f(x)|\mathrm{d}y<\frac{1}{2}\varepsilon b,
$$

从而

$$t^{\varepsilon}\int_{t}^{\eta}u^{-n-1-\varepsilon}\int_{|y|\leqslant u}|f(xy^{-1})-f(x)|\mathrm{d}y$$
$$<\frac{\varepsilon}{2}bt^{\varepsilon}\int_{t}^{\eta}u^{-1-\varepsilon}\mathrm{d}u$$
$$=\frac{\varepsilon}{2}b\cdot\frac{1}{\varepsilon}t^{\varepsilon}(t^{-\varepsilon}-\eta^{-\varepsilon})<\frac{1}{2}b,$$

而对固定的 η，有

$$t^{\varepsilon}\int_{\eta}^{a_0}u^{-1-\varepsilon}F(u)\mathrm{d}u\to 0\quad(t\to 0),$$

从而存在正数 B_1，只要$0<t<B_1$，就有

$$t^{\varepsilon}\int_{\eta}^{a_0}u^{-1-\varepsilon}F(u)\mathrm{d}u<\frac{1}{2}b.$$

这就证明了 $t\to 0$时第三项也趋于零. 即 $t\to 0$时 $I_2\to 0$. 定理得证. ▌

由定理2.9可得下面的推论：

推论 2.1　假设与定理2.9相同，则当 $f\in L(G)$时，

$$\lim_{t\to 0}S_t^{\varepsilon}(f,x)=f(x)$$

对几乎所有的 $x\in G$ 均成立；而当 $f\in L^2(G)$时，

$$\lim_{t\to 0}S_t^{\varepsilon}(f,x)=f(x)$$

对 f 的每个 Lebesgue 点均成立，从而也几乎处处成立.

2.3.2　Peter-Weyl 定理的证明

由 §2.2和本节中前一小节中的结果，就可证明 Peter-Weyl 定理. 注意到 §2.2中的结果并不依赖于 G 上函数系(1.100)的完备性，而定理2.9的结果也不依赖于函数系(1.100)的完备性，因此在 Peter-Weyl 定理的证明中可应用上述的结果.

现在来证明第1章中引理1.23形式的 Peter-Weyl 定理.

在第1章的1.4.5小节中，曾讨论过 G 的权和支配权. 从该节的讨论中可知，G 的权的集合就是

$$\bigcup_{\sigma\in W}\sigma(\widehat{G}).$$

令 n_λ 为 W 中使 $\lambda\in\widehat{G}$不动的迷向子群 $W(\lambda)$的阶，则当 $\lambda\in\widehat{G}$

是严格支配权时 $n_\lambda = 1$. 而当 λ 不是严格支配权时，则有

$$1 < n_\lambda \leqslant |W|.$$

再令

$$C_\lambda(h) = \frac{1}{n_\lambda}\sum_{\sigma\in W} e^{i(\sigma(\lambda),h)}, \quad \lambda \in \hat{G}. \tag{2.41}$$

则当 f 是 G 的 Cartan 子群 T 上的 Weyl 群不变的函数时，f 的多重 Fourier 级数是

$$f(\exp h) \sim \sum_{\lambda\in\hat{G}} a_\lambda(f) C_\lambda(h). \tag{2.42}$$

不妨设 $f(\exp h)$ 是 T 上的 C^∞ 函数，前面曾指出，δ 不一定是 G 的权，当限制在 $h\in Q$ 上，$D(h)$ 至少定义了 T 上的 Weyl 群反对称的有界函数. 同样地，令

$$D_{\lambda+\delta}(h) = \sum_{\sigma\in W} \det\sigma e^{i(\sigma(\lambda+\delta),h)}, \quad \lambda \in \hat{G}, \tag{2.43}$$

限制在 $h\in Q$ 上也定义了 T 上的 Weyl 群反对称的有界函数，且

$$\{D_{\lambda+\delta}(h), \ \lambda \in \hat{G}\} \tag{2.44}$$

是 T 上的一个正交函数系. 而 G 的不可约酉表示的特征则表示为

$$\chi_\lambda(\exp h) = D_{\lambda+\delta}(h)/D(h). \tag{2.45}$$

于是当 $f(\exp h)$ 在 T 上 C^∞ 时，有

$$f(\exp h)D(h) = \sum_{\lambda\in\hat{G}} a_\lambda(f) C_\lambda(h) D(h). \tag{2.46}$$

考虑 $\lambda\in\hat{G}$ 时的 $C_\lambda(h)D(h)$，则它是 $\mathfrak{h}$ 上 Weyl 群反对称的三角多项式. 由第1章的1.4.8小节中的引理1.12、引理1.13和引理1.14，可得到 $C_\lambda(h)D(h)$ 是有限个基本反对称三角多项式的代数和，它们的严格支配权是 $\lambda+\delta$ 和某些 $\lambda+\sigma(\delta)$. 但是由引理1.15的证明中知道

$$\sigma(\delta) = \delta - \mu,$$

其中 μ 是某些正根之和，从而 μ 是 G 的权，也就是 $\lambda-\mu$ 是 G 的权. 因为对任一素根 α 均有

$$2(\delta,\alpha)/(\alpha,\alpha) = 1$$

和

$$2(\lambda-\mu,\alpha)/(\alpha,\alpha)=\text{整数},$$

从而要使 $\lambda-\mu+\delta$ 是严格支配权，就必须是

$$\lambda-\mu\in\hat{G}.$$

当 $\sigma(\lambda)\neq\lambda,\lambda\in\hat{G}$ 时，$\sigma(\lambda)+\delta$ 必然不是严格支配权，因为这时必然有素根系 $\Pi=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_l\}$ $(l\leqslant r)$ 中的某个素根 α_j，使得

$$2(\sigma(\lambda),\alpha_j)/(\alpha_j,\alpha_j)\leqslant-1.$$

因此可得

$$C_\lambda(h)D(h)=\sum_{\mu=\lambda+\sigma(\delta)-\delta\in\hat{G}}b_\mu D_{\mu+\delta}(h),\qquad(2.47)$$

其中 $|b_\mu|\leqslant|W|$. 这又表明了每个 $\mu\in\hat{G}$ 至多出现在 $N_0\leqslant|W|4^l|\delta|^l\Big/\prod_{j=1}^{l}|\alpha_j|$ 个不同的 $\lambda\in\hat{G}$ 的分解式(2.47)之中，所以当 f 在 T 上 C^∞ 时，(2.46)中有

$$\sum_{\lambda\in\hat{G}}|a_\lambda(f)|<+\infty.$$

将(2.47)式代入(2.46)则得到

$$f(\exp h)D(h)=\sum_{\lambda\in\hat{G}}C_\lambda(f)D_{\lambda+\delta}(h),$$

其中 $C_\lambda(f)$ 是有限个 $a_\lambda(f)$ 之和，从而有

$$\sum_{\lambda\in\hat{G}}|C_\lambda(f)|<+\infty.$$

这就得到对 Weyl 群对称的 T 上 C^∞ 函数 f:

$$f(\exp h)=\sum_{\lambda\in\hat{G}}C_\lambda(f)\chi_\lambda(\exp h)$$

对任意一个 T 上 C^∞ 的 Weyl 群对称函数恒成立. 再由于 G 上 C^∞ 的中心函数由 T 上 C^∞ 的 Weyl 群对称函数唯一决定，从而当 $f\in C_I^\infty(G)$ 时，就有

$$f(x)=\sum_{\lambda\in\hat{G}}a_\lambda(f)d_\lambda\chi_\lambda(x).$$

即函数系 $\{\chi_\lambda(x),\lambda\in\hat{G}\}$ 是 $L_I^2(G)$ 的完备标准正交函数系. 从而在

证明 Peter-Weyl 定理时，定理2.5到定理2.9，包括(2.33)式均可应用.

对 f、$g\in L^2(G)$，记

$$\langle f,g\rangle=\int_G f(x)\overline{g(x)}\mathrm{d}x$$

为 $L^2(G)$的 Hermite 内积，其中 $\mathrm{d}x$ 是 G 上的规格化的 Haar 测度，设 $f\in L^2(G)$的 Fourier 级数为

$$f(x)\sim\sum_{\lambda\in\hat{G}}d_\lambda\mathrm{Tr}(\hat{f}_\lambda\rho_\lambda(x)),$$

并置

$$S_N(f,x)=\sum_{\substack{\lambda\in\hat{G}\\|\lambda+\delta|\leqslant N}}d_\lambda\mathrm{Tr}(\hat{f}_\lambda\rho_\lambda(x)),$$

则易得

$$\begin{aligned}&\|f(\cdot)-S_N(f,\cdot)\|_2^2\\&=\langle f(\cdot)-S_N(f,\cdot),f(\cdot)-S_N(f,\cdot)\rangle\\&=\langle f,f\rangle-2\langle f,S_N(f,\cdot)\rangle\\&\quad+\langle S_N(f,\cdot),S_N(f,\cdot)\rangle\\&=\|f\|_2^2-\sum_{|\lambda+\delta|\leqslant N}d_\lambda\mathrm{Tr}(\hat{f}_\lambda\overline{\hat{f}}'_\lambda)\geqslant 0.\end{aligned}$$

因为

$$d_\lambda\mathrm{Tr}(\hat{f}_\lambda\overline{\hat{f}}'_\lambda)\geqslant 0,\ \lambda\in\hat{G},$$

所以对上式最后一个等式的右端令 $N\to+\infty$，就得到

$$\|f\|_2^2\geqslant\sum_{\lambda\in\hat{G}}d_\lambda\mathrm{Tr}(\hat{f}_\lambda\overline{\hat{f}}'_\lambda).$$

再考虑 f 的 Abel—龚平均，则有

$$\begin{aligned}&\|S_t^A(f,\cdot)-f(\cdot)\|_2\\&=\left\|\int_G A_t(y)f(\cdot,y^{-1})\mathrm{d}y-f(\cdot)\right\|_2\\&\leqslant\left\|\int_G A_t(y)(f(\cdot,y^{-1})-f(\cdot))\mathrm{d}y\right\|_2\\&\quad+|\mathrm{e}^{-t|\delta|}-1|\cdot\|f\|_2\end{aligned}$$

$$\leqslant \int_G |A_t(y)| \cdot \|(\Pi_1 f\ \cdot)(y^{-1}) - f(\cdot)\|_2 \mathrm{d}y + |\mathrm{e}^{-t|\delta|} - 1| \cdot \|f\|_2.$$

其中令

$$F(y) \equiv \|(\Pi_1 f\ \cdot)(y) - f(\cdot)\|_2 = \left(\int_G |(\Pi_1 f_x)(y) - f(x)|^2 \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}},$$

则可得 $F(y)$是 G 上的中心函数,且有

$$\begin{aligned}\int_G |F(y)|^2 \mathrm{d}y &= \int_G\int_G |(\Pi_1 f_x)(y) - f(x)|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \int_G\int_G |(\Pi_1 f_x)(y)|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &\quad + \int_G\int_G |f(x)|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &\quad - 2\mathrm{Re}\int_G\int_G (\Pi_1 f_x)(y)\overline{f(x)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

因为

$$(\Pi_1 f_x)(y) = \int_G f(xtyt^{-1})\mathrm{d}t,$$

从而可得

$$\begin{aligned}&\int_G\int_G |(\Pi_1 f_x)(y)|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &\quad = \int_G\int_G \left|\int_G f(x)\mathrm{d}t\right|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &\quad \leqslant \|f\|_2^2,\end{aligned}$$

同样可得

$$\begin{aligned}&\left|\int_G\int_G (\Pi_1 f_x)(y)\overline{f(x)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right| \\ &\quad = \left|\int_G\int_G\int_G f(xty\,t^{-1})\mathrm{d}y\overline{f}(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right| \\ &\quad = \left|\int_G\int_G\int_G f(y)\overline{f}(x)\mathrm{d}y\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right|\end{aligned}$$

$$\leqslant \|f\|_1^2 \leqslant \|f\|_2^2.$$

从而得到

$$\|F\|_2 \leqslant 2\|f\|_2,$$

即 $F \in L_I^2(G)$.

其次显然有

$$F(e) = 0,\ F(y) \geqslant 0$$

以及 F 在 e 点连续. 从而 e 是 F 的 Lebesgue 点.

现在由

$$S_t^A(F,e) - F(e) = S_t^A(F,e)$$

且由定理2.9及其证明和推论2.1可得

$$\begin{aligned}0 &= \lim_{t\to 0} S_t^A(F,e)\\ &= \lim_{t\to 0}\int_G |A_t(y)| \cdot |F(y^{-1})|\mathrm{d}y\\ &= \lim_{t\to 0}\int_G |A_t(y)| \cdot \|(\Pi_1 f\cdot(y^{-1}) - f(\cdot)\|_2\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

这就证明了

$$\lim_{t\to 0}\|S_t^A(f,\cdot) - f(\cdot)\|_2 = 0,$$

此即

$$\lim_{t\to 0}\|S_t^A(f,\cdot)\|_2^2 = \|f\|_2^2.$$

但是由定理2.9的(2.33)式

$$\begin{aligned}&\|S_t^A(f,\cdot)\|_2^2\\ &= \sum_{\lambda\in\hat{G}} \mathrm{e}^{-2t|\lambda+\delta|} d_\lambda \mathrm{Tr}(\hat{f}_\lambda \overline{\hat{f}}'_\lambda),\end{aligned}$$

令 $t\to 0$就得到

$$\|f\|_2^2 = \sum_{\lambda\in\hat{G}} d_\lambda \mathrm{Tr}(\hat{f}_\lambda \overline{\hat{f}}'_\lambda).$$

这就证明了 Peter-Weyl 定理. ▌

2.3.3 ϕ-平均的性质

本小节对由定理2.5定义的 $K_t^\phi(x)$产生的 G 上可积函数 $f \in L(G)$的 ϕ-平均

$$S_t^\phi(f,x) = K_t^\phi * f(x) \tag{2.48}$$

的性质作较详细的讨论.

定理 2.10　设 ϕ、Φ、Φ_t 和 $K_t^\phi(x)$ 适合定理2.5，f 的 ϕ-平均 $S_t^\phi(f,x)$ 由(2.48)式定义，则有

(1) 若 $f\in L^p(G)$，$p\geqslant 1$，则有

$$\|S_t^\phi(f,\cdot)\|_p \leqslant A\|f\|_p$$

成立. 其中 A 依赖于 G，ϕ 和 $t>0$；

(2) 若 $P(h)\left(P\left(\frac{\partial}{\partial h}\right)\Phi\right)(h)\in L(\mathfrak{h})$，则有

$$\sup_{t>0}\{\|S_t^\phi(f,\cdot)\|_p\} \leqslant A\|f\|_p$$

成立. 其中 A 仅依赖于 G 和 ϕ.

证明　由(2.48)式，当 $f\in L^p(G)$，$p\geqslant 1$时，

$$\begin{aligned}\|S_t^\phi(f,\cdot)\|_p &= \|K_t^\phi * f\|_p \\ &\leqslant \int_G |K_t^\phi(y)|\cdot\|f(\cdot\, y^{-1})\|_p \mathrm{d}y \\ &= \int_G |K_t^\phi(y)|\cdot\|(\Pi_1 f\,\cdot)(y^{-1})\|_p \mathrm{d}y,\end{aligned}$$

其中

$$\|(\Pi_1 f\,\cdot)(y^{-1})\|_p = \left(\int_G |(\Pi_1 f_x)(y^{-1})|^p \mathrm{d}x\right)^{1/p}, \tag{2.49}$$

$$(\Pi_1 f_x)(y) = \int_G f(xtyt^{-1})\mathrm{d}t. \tag{2.50}$$

现在置

$$F(y) = \|(\Pi_1 f_x)(y)\|_p, \tag{2.51}$$

则有

$$\begin{aligned}(F(y))^p &= \int_G |(\Pi_1 f_x)(y)|^p \mathrm{d}x \\ &= \int_G \left|\int_G f(xtyt^{-1})\mathrm{d}t\right|^p \mathrm{d}x \\ &\leqslant \int_G\int_G |f(xtyt^{-1})|^p \mathrm{d}t\mathrm{d}x\end{aligned}$$

$$= \int_G \int_G |f(x)|^p \mathrm{d}x\mathrm{d}t = \|f\|_p^p,$$

此即

$$0 \leqslant F(y) \leqslant \|f\|_p.$$

F 是 G 上连续的中心函数，由此可得

$$\|S_t^\phi(f, \cdot)\|_p \leqslant \int_G |K_t^\phi(y)| F(y^{-1}) \mathrm{d}y$$

$$\leqslant \int_G |K_t^\phi(y)| \mathrm{d}y \|f\|_p.$$

由定理2.5可知

$$\int_G |K_t^\phi(y)| \mathrm{d}y \leqslant \frac{1}{P(\delta)(2\pi)^{\frac{1}{2}r} t^m} \int_{\mathfrak{h}} \left| \left(P\left(\frac{\partial}{\partial h} \right) \Phi \right)(h) \right| \mathrm{d}h,$$

这就证明了定理中的(1).

对定理中的(2)，则由

$$\int_G |K_t^\phi(y)| \mathrm{d}y$$

$$\leqslant B_G \int_{\mathfrak{h}} \left| \left(P\left(\frac{\partial}{\partial h} \right) \Phi_t \right)(h) \overline{D(h)} \right| \mathrm{d}h$$

$$= B_G \int_{\mathfrak{h}} \left| \left(P\left(\frac{\partial}{\partial h} \right) \Phi_t \right)(h) P(h) \overline{D_0(h)} \right| \mathrm{d}h$$

$$= B_G \int_{\mathfrak{h}} \left| \left(P\left(\frac{\partial}{\partial h} \right) \Phi \right)(h) P(h) \overline{D_0(th)} \right| \mathrm{d}h,$$

其中

$$B_G = 1/(|W| P(\delta)(2\pi)^{\frac{1}{2}r}).$$

因为

$$|D_0(h)| \leqslant 1,$$

从而可得

$$\int_G |K_t^\phi(y)| \mathrm{d}y \leqslant B_G \int_{\mathfrak{h}} \left| \left(P\left(\frac{\partial}{\partial h} \right) \Phi \right)(h) P(h) \right| \mathrm{d}h,$$

这就证明了本定理. ▌

记

$$\operatorname*{ess\,sup}_{|h| \geqslant t} \{ |f(h)| \} \tag{2.52}$$

为数集$\{|f(h)|,|h|\geqslant t\}$的本性上界，于是有如下定理：

定理2.11　设ϕ、Φ、Φ_t、$K_t^\phi(x)$如定理2.5中所定义. 又设

$$\phi_0(u)=\operatorname*{ess\,sup}_{|h|\geqslant u}\{|\phi(h)|\},$$

$$\Psi_0(u)=\operatorname*{ess\,sup}_{|h|\geqslant u}\left\{\left|P(h)^{-1}P\left(\frac{\partial}{\partial h}\right)\Phi(h)\right|\right\},$$

$S_t^\phi(f,x)$由(2.48)式定义，则有

(1) $S_t^\phi(f,x)$的 Fourier 级数是

$$S_t^\phi(f,x)\sim\sum_{\lambda\in\hat{G}}\phi(t(\lambda+\delta))d_\lambda\chi_\lambda*f(x);$$

(2) 若$\phi_0(u)u^{m+r-1}\in\mathrm{L}([0,+\infty))$，特别是，若

$$|\phi(h)|\leqslant A(1+|h|)^{-m-r-\varepsilon},$$

其中$A>0$,$\varepsilon>0$为正常数，则有

$$S_t^\phi(f,x)=\sum_{\lambda\in\hat{G}}\phi(t(\lambda+\delta))d_\lambda\chi_\lambda*f(x)$$

对任意的$t>0$和几乎所有的$x\in G$成立.

证明　定理中的(1)是定理2.5和第1章§1.5中的引理1.17和引理1.19的自然推论.

对于定理的(2)，由

$$\begin{aligned}\chi_\lambda*f(x)&=\int_G\chi_\lambda(y)f(xy^{-1})\mathrm{d}y\\&=\int_G\chi_\lambda(y)(\Pi_1f_x)(y^{-1})\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{|W|\cdot|Q|}\int_Q(\Pi_1f_x)(\exp(-h))\\&\quad\times D_{\lambda+\delta}(h)\overline{D(h)}\mathrm{d}h\end{aligned}$$

可得到

$$\begin{aligned}&|\chi_\lambda*f(x)|\\&\leqslant\frac{1}{|W|\cdot|Q|}\int_Q|(\Pi_1f_x)(\exp(-h))|\cdot|D_{\lambda+\delta}(h)|\cdot|D(h)|\mathrm{d}h\\&\leqslant\frac{|W|}{|Q|}\int_Q|(\Pi_1f_x)(\exp h)|\mathrm{d}h\equiv B(f,x).\end{aligned}$$

这就得到

$$\begin{aligned}&\left|\sum_{\lambda\in\hat{G}}\phi(t(\lambda+\delta))d_\lambda\chi_\lambda * f(x)\right|\\&\leqslant B(f,x)\sum_{\lambda\in\hat{G}}|\phi(t(\lambda+\delta))|d_\lambda\\&\leqslant B(f,x)\Big(\prod_{\alpha>0}|\alpha|\Big)P(\delta)^{-1}\\&\quad\times\sum_{\lambda\in\hat{G}}\phi_0(t|\lambda+\delta|)|\lambda+\delta|^m.\end{aligned}$$

现在只需证明当 $t>0$时，有

$$\sum_{\lambda\in\hat{G}}\phi_0(t|\lambda+\delta|)|\lambda+\delta|^m<+\infty \tag{2.53}$$

及证明

$$B(f,x)\in \mathrm{L}(G), \tag{2.54}$$

就证明了定理的(2).

先证明(2.53)式：记 Λ^* 为 G 的全体权之集，则 Λ^* 可看作 $\mathfrak{h}$ 中的格点集. 令 $Q^*=\mathfrak{h}/\Lambda^*$，则 Q^* 可看作 $\mathfrak{h}$ 中以原点为中心的平行多面体，同前面的 $Q=\mathfrak{h}/\Lambda$ 一样，有

$$\mathfrak{h}=\bigcup_{\lambda\in\Lambda^*}\lambda+Q^*$$

成立. 且对任意两个不同的 λ、$\mu\in\Lambda^*$，$\lambda+Q^*$ 和 $\mu+Q^*$ 无公共内点. 再对 $k=1,2,\cdots$，记

$$B_k(t)=\{h\in\mathfrak{h},(k-1)tr_0\leqslant|h|\leqslant ktr_0\},$$

其中 r_0是 Q^* 的直径. 又对 $k=-2,-1,0,1,2,\cdots$，有

$$C_k(t)=B_{k-1}(t)\cup B_k(t)\cup B_{k+1}(t),$$

其中 $B_0(t)=B_{-1}(t)=B_{-2}(t)=tQ^*$ 中包含的最大球，它的半径为 tr_1.

对于 $\lambda\in\hat{G}$，$t(\lambda+\delta)$必属于某个 $B_k(t)$. 且若 $t(\lambda+\delta)\in B_k(t)$，则必有

$$t(\lambda+\delta+Q^*)\subset C_k(t).$$

再令

$$a_G=\sup_{0\neq\lambda\in\hat{G}}\ \sup_{h\in\lambda+\delta+Q^*}\{|\lambda+\delta|/|h|\},$$

$$b_G=\sup_k\left\{\int_{C_k(t)}|h|^m\mathrm{d}h\Big/\int_{C_{k-2}(t)}|h|^m\mathrm{d}h\right\}.$$

则可得

$$|\lambda+\delta|^m \leqslant \frac{a_G}{t^{m+r}|Q^*|}\int_{t(\lambda+\delta+Q^*)}|h|^m \mathrm{d}h. \tag{2.55}$$

由(2.55)式则得到

$$\begin{aligned}&\sum_{\substack{t(\lambda+\delta)\in B_k(t)\\ \lambda\neq 0}}\phi_0(t|\lambda+\delta|)|\lambda+\delta|^m\\ &\leqslant \frac{a_G}{t^{m+r}|Q^*|}\phi_0((k-1)tr_0)\int_{C_k(t)}|h|^m\mathrm{d}h\\ &\leqslant \frac{a_Gb_G}{t^{m+r}|Q^*|}\int_{C_{k-2}(t)}\phi_0(|h|)\cdot|h|^m\mathrm{d}h. \end{aligned}\tag{2.56}$$

由(2.56)式推出

$$\begin{aligned}&\sum_{0\neq\lambda\in\hat{G}}\phi_0(t|\lambda+\delta|)|\lambda+\delta|^m\\ &\leqslant \frac{3a_Gb_G}{t^{m+r}|Q^*|}\int_{\mathfrak{h}}\phi_0(|h|)|h|^m\mathrm{d}h\\ &= \frac{3a_Gb_G\omega_{r-1}}{t^{m+r}|Q^*|}\int_0^\infty\phi_0(u)u^{m+r-1}\mathrm{d}u<+\infty. \end{aligned}$$

这就证明了(2.53)式.

再由

$$\begin{aligned}&\int_G B(f,x)\mathrm{d}x\\ &= \frac{|W|}{|Q|}\int_G\int_Q|(\Pi_1 f_x)(\exp h)|\mathrm{d}h\\ &\leqslant \frac{|W|}{|Q|}\int_G\int_Q\int_G|f(xt\exp ht^{-1})|\mathrm{d}t\mathrm{d}h\mathrm{d}x\\ &= \frac{|W|}{|Q|}\int_G\int_Q\int_G|f(x)|\mathrm{d}x\mathrm{d}h\mathrm{d}t\\ &= |W|\cdot\|f\|_1, \end{aligned}$$

即(2.54)式成立. 于是证明了本定理. ▌

定理2.12 设 ϕ、Φ、Φ_t、$K_t^\phi(x)$、ϕ_0、Ψ_0与定理2.11中的相同，$S_t^\phi(f,x)$由(2.48)式所定义. 再设 $\phi(0)=1$，则当 $\phi_0(|X|)$和$\Psi_0(|X|)$均为李代数 $\mathfrak{g}$ 上的径向可积函数时，有如下结论成立：

(1) 若 $f\in L^p(G)$, $p\geqslant 1$ 则有

$$S_t^\phi(f,x)=\sum_{\lambda\in\hat{G}}\phi(t(\lambda+\delta))d_\lambda\chi_\lambda * f(x);$$

(2) 若 $f\in L^p(G)$, $p\geqslant 1$ 则有

$$\lim_{t\to 0}\|S_t^\phi(f,\cdot)-f(\cdot)\|_p=0;$$

(3) 若 $f\in L^p(G)$, $p\geqslant 1$, 则当 $t\to 0$ 时, $S_t^\phi(f,x)$ 几乎处处收敛于 $f(x)$;

(4) 设

$$Mf(x)=\sup_{t>0}\left\{\int_{|y|\leqslant t}|f(xy)|\mathrm{d}y\Big/\int_{|y|\leqslant t}\mathrm{d}t\right\}$$

为 f 的 Hardy-Littlwood 极大函数, 则有

$$\sup_{t>0}\{|S_t^\phi(f,x)|\}$$
$$\leqslant A\{Mf(x)+\int_G|D(y)|^{-1}|f(xy^{-1})|\mathrm{d}y\};$$

(5) 用 $m(E)$ 表示 $E\subset G$ 的 Haar 测度, 则有

$$m\{x\mid\sup_{t>0}|S_t^\phi(f,x)|>y\}\leqslant Ay^{-1}\|f\|_1.$$

证明 对于定理中的(1), 由于

$$\begin{aligned}|\chi_\lambda * f(x)|&\leqslant\int_G|\chi_\lambda(y)|\cdot|f(xy^{-1})|\mathrm{d}y\\&\leqslant d_\lambda\int_G|f(xy^{-1})|\mathrm{d}y\\&=d_\lambda\|f\|_1,\end{aligned}$$

从而有

$$\begin{aligned}&\sum_{\lambda\in\hat{G}}|\phi(t(\lambda+\delta))d_\lambda\chi_\lambda * f(x)|\\&\leqslant\sum_{\lambda\in\hat{G}}|\phi(t(\lambda+\delta))|d_\lambda^2\|f\|_1\\&\leqslant\sum_{\lambda\in\hat{G}}\phi_0(t|\lambda+\delta|)P(\lambda+\delta)^2P(\delta)^{-2}\|f\|_1\\&\leqslant B_G\|f\|_1\sum_{\lambda\in\hat{G}}\phi_0(t|\lambda+\delta|)|\lambda+\delta|^{2m},\end{aligned}$$

其中 $B_G = P(\delta)^{-2}\prod_{\alpha>0}|\alpha|$.

同在定理2.11中所证相同，可得

$$\begin{aligned}\sum_{\lambda\in\hat{G}}&\phi_0(t|\lambda+\delta|)|\lambda+\delta|^{2m}\\&\leqslant\phi_0(t|\delta|)|\delta|^{2m}+b_Gt^{-n}\\&\quad\times\int_0^{\infty}\phi_0(u)u^{n-1}\mathrm{d}u\\&\leqslant\phi_0(0)|\delta|^{2m}+\frac{b_G}{t^n\omega_{n-1}}\\&\quad\times\int_{\mathfrak{g}}\phi_0(|X|)\mathrm{d}X,\end{aligned}$$

其中 n 是 G 也就是 $\mathfrak{g}$ 的维数，m 是 $\mathfrak{g}$ 的正根个数，ω_{n-1}是 R^n 中单位球面的 $n-1$维体积. 这就证明了 $S_t^\phi(f,x)$的 Fourier 级数绝对一致收敛.

以下证明定理中的(3)：由

$$\begin{aligned}S_t^\phi&(f,x)-f(x)\\&=\int_G K_t^\phi(y)(f(xy^{-1})-f(x))\mathrm{d}y\\&\quad+(\phi(t\delta)-1)f(x)\\&=\int_G K_t^\phi(y)((\Pi_1 f_x)(y^{-1})-f(x))\mathrm{d}y\\&\quad+(\phi(t\delta)-1)f(x).\end{aligned}$$

对上式两端取绝对值，得到

$$\begin{aligned}|S_t^\phi&(f,x)-f(x)|\\&\leqslant\int_G|K_t^\phi(y)|\cdot|(\Pi_1 f_x)(y^{-1})-f(x)|\mathrm{d}y\\&\quad+|\phi(t\delta)-1|\cdot|f(x)|.\end{aligned}\tag{2.57}$$

因为 ϕ 连续且 $\phi(0)=1$，(2.57)式的右端第二项在 $t\to0$时趋于零，所以只需证明

$$\lim_{t\to0}\int_G|K_t^\phi(y)|\cdot|(\Pi_1 f_x)(y^{-1})-f(x)|\mathrm{d}y=0.$$

由 G 上中心函数的积分公式和定理2.5，可得

$$
\begin{aligned}
&\int_G |K_t^f(y)| F_x(y^{-1})\mathrm{d}y \\
&\leqslant A_G\int_{\mathfrak{h}}\left|\left(P\left(\frac{\partial}{\partial h}\right)\Phi_t\right)(h)\ \overline{D(h)}\right| \\
&\qquad \times F_x(\exp(-h))\mathrm{d}h,
\end{aligned}
$$

其中

$$
F_x(y) = |(\Pi_1 f_x)(y) - f(x)|
$$

是 G 上非负可积的中心函数，且适合 $F_x(e)=0$.

由(2.35)和(2.36)式得到

$$
\begin{aligned}
&\int_G |K_t^f(y)| F_x(y^{-1})\mathrm{d}y \\
&\leqslant A_G\int_{\mathfrak{h}} t^{-n}|\Psi(t^{-1}h)P(h)\ \overline{D(h)}| \\
&\qquad \times F_x(\exp(-h))\mathrm{d}h \\
&= A_G\left(\int_{|h|\leqslant t} + \int_{t\leqslant |h|\leqslant a_0} + \int_{|h|\geqslant a_0}\right) \\
&= I_1 + I_2 + I_3.
\end{aligned}
\tag{2.58}
$$

其中 a_0由(2.38)式定义.

(2.58)式中的 I_1的估计与定理2.9证明中的 I_1的估计完全相同. 从而得到：若 x 是 f 的 Lebesgue 点，则当 $t\to 0$时，就有 $I_1\to 0$.

再估计 I_3：令

$$
B(u) = \int_{|h|\leqslant u} |h|^{2m}|D(h)|F_x(\exp h)\mathrm{d}h,
$$

$$
a_G = \sup_{u\geqslant a_0}\left\{B(u)\bigg/\left(u^n\int_Q |D(h)|F_x(\exp h)\mathrm{d}h\right)\right\},
$$

则当 $D(h)F_x(\exp h)$在 Q 上可积时，a_G 是仅依赖于 G 的正常数. 由(2.58)式可得

$$
\begin{aligned}
I_3 &\leqslant A_G\left(\prod_{\alpha>0}|\alpha|\right)t^{-n} \\
&\quad\times\int_{|h|\geqslant a_0}\Psi_0(t^{-1}|h|)\,|h|^m|D(h)|\,F_x(\exp h)\mathrm{d}h
\end{aligned}
$$

$$\leqslant A_G\left(\prod_{\alpha>0}\frac{|\alpha|}{a_0}\right)t^{-n}$$

$$\times\int_{|h|\geqslant a_0}\Psi_0(t^{-1}|h|)|h|^{2m}|D(h)|F_x(\exp h)\mathrm{d}h$$

$$=A_G\left(\prod_{\alpha>0}\frac{|\alpha|}{a_0}\right)t^{-n}\int_{a_0}^{+\infty}\Psi_0(t^{-1}u)\mathrm{d}B(u)$$

$$=A_G\left(\prod_{\alpha>0}\frac{|\alpha|}{a_0}\right)t^{-n}\Psi_0(t^{-1}u)B(u)\Big|_{a_0}^{+\infty}$$

$$+(-1)A_G\left(\prod_{\alpha>0}\frac{|\alpha|}{a_0}\right)t^{-n}\int_{a_0}^{+\infty}B(u)\mathrm{d}\Psi_0(t^{-1}u).\quad(2.59)$$

因为 $\Psi_0(u)u^{n-1}$在$[0,+\infty)$上可积，且 Ψ_0单调递减，从而可得

$$\Psi_0(u)u^n\to 0,\ u\to+\infty.$$

再由 $B(u)\leqslant a_G u^n$，即可得(2.59)式的最后一个等式右端的第一项因为 $u\geqslant a_0>0$，从而在 $t\to 0$时也趋于零. 又因为 Ψ_0是减函数，从而

$$-\mathrm{d}\Psi_0(t^{-1}u)=|\mathrm{d}\Psi_0(t^{-1}u)|$$

是一个非负的测度，(2.59)式最后一个等式右端的第二项中的积分适合

$$0\leqslant -t^n\int_{a_0}^{+\infty}B(u)\mathrm{d}\Psi_0(t^{-1}u)$$

$$\leqslant -a_G t^{-n}\int_{a_0}^{+\infty}u^n\mathrm{d}\Psi_0(t^{-1}u)$$

$$\times\int_Q|D(h)|F_x(\exp h)\mathrm{d}h$$

$$=a_G t^{-n}a_0^n\Psi_0(a_0/t)$$

$$\times\int_Q|D(h)|F_x(\exp h)\mathrm{d}h$$

$$+a_G n t^{-n}\int_{a_0}^{\infty}\Psi_0(t^{-1}u)u^{n-1}\mathrm{d}u$$

$$\times\int_Q|D(h)|F_x(\exp h)\mathrm{d}h,$$

由定理的题设条件 $\Psi_0(|X|)$在李代数 $\mathfrak{g}$ 上可积，即 $\Psi_0(u)u^{n-1}$在$[0,+\infty)$上可积，从而当 $t\to 0$时上式趋于零.

由以上的证明就得到了：若 $|D(h)|F_x(\exp h)$ 在 Q 上可积，则当 $t\to 0$ 时，就有 $I_3\to 0$.

接着估计 I_2：由(2.38)式和(2.58)式，有

$$\begin{aligned}
I_2 &\leqslant A_G a_1 t^{-n} \\
&\quad\times\int_{t\leqslant|h|\leqslant a_0}\Psi_0(t^{-1}|h|)\,|D(h)|^2F_x(\exp h)\mathrm{d}h \\
&= A_G a_1 t^{-n}\int_t^{a_0}\Psi_0(t^{-1}u) \\
&\quad\times\int_\Sigma |D(u\sigma)|^2F_x(\exp u\sigma)\mathrm{d}\sigma u^{r-1}\mathrm{d}u \\
&= A_G a_1 t^{-n}\int_t^{a_0}\Psi_0(t^{-1}u)\mathrm{d}\int_{|y|\leqslant u}F_x(y)\mathrm{d}y,
\end{aligned}$$

其中 $\mathrm{d}y$ 是 G 上的规格化的 Haar 测度，对于 $y\in G$，$|y|$ 表示 y 到么元 e 间的 Riemann 矩离. 由此可得

$$\begin{aligned}
I_2 &\leqslant A_G a_1 t^{-n}\Psi_0(t^{-1}u) \\
&\quad\times\int_{|y|\leqslant u}F_x(y)\mathrm{d}y\Big|_t^{a_0}+(-1)A_G a_1 t^{-n} \\
&\quad\times\int_t^{a_0}\int_{|y|\leqslant u}F_x(y)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}\Psi_0(t^{-1}u).
\end{aligned}\tag{2.60}$$

因为

$$\int_{|y|\leqslant u}F_x(y)\mathrm{d}y=\int_{|y|\leqslant u}|f(xy^{-1})-f(x)|\mathrm{d}y,$$

由 I_1 和 I_3 的估计结果，与定理2.9的 I_2 的估计一样，对任意的 $b>0$，可取到 $\eta>0$，使当 $0<u<\eta$ 时，有

$$u^{-n}\int_{|y|\leqslant u}F_x(y)\mathrm{d}y<b,$$

从而可得

$$\begin{aligned}
0 &\leqslant -t^{-n}\int_t^{\eta}\int_{|y|\leqslant u}F_x(y)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}\Psi_0(t^{-1}u) \\
&\leqslant -bt^{-n}\int_t^{\eta}u^n\mathrm{d}\Psi_0(t^{-1}u) \\
&= b\left\{\left(\Psi_0(1)-\left(\frac{\eta}{t}\right)^n\Psi_0\left(\frac{\eta}{t}\right)\right)\right.
\end{aligned}$$

$$+ n\int_1^{\eta/t}\Psi_0(u)u^{n-1}\mathrm{d}u\Big\}.$$

而对固定的 $\eta>0$,则有

$$\begin{aligned}0 &\leqslant -t^{-n}\int_\eta^{a_0}\int_{|y|\leqslant u}F_x(y)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}\Psi_0(t^{-1}u)\\ &\leqslant b_G(-1)t^{-n}\int_\eta^{a_0}u^n\mathrm{d}\Psi_0(t^{-1}u)\\ &= b_G\Big\{\Big(\frac{\eta}{t}\Big)^n\Psi_0\Big(\frac{\eta}{t}\Big)-\Big(\frac{a_0}{t}\Big)^n\Psi_0\Big(\frac{a_0}{t}\Big)\\ &\quad+\int_{\eta/t}^{a_0/t}n\Psi_0(u)u^{n-1}\mathrm{d}u\Big\}.\end{aligned}$$

由 I_3中的说明,$u^n\Psi_0(u)\to0$ $(u\to+\infty)$和 $\Psi_0(u)u^{n-1}$在$[0,+\infty)$上可积,上式在 $t\to0$时趋于零.这就说明了若 x 是 f 的 Lebesgue 点,则当 $t\to0$时有 $I_2\to0$.因为 $F_x(\exp h)$若在 Q 上可积,则 $F_x(\exp h)|D(h)|$必在 Q 上可积,而 $F_x(\exp h)$在 Q 上可积等价于 x 是 f 的 Lebesgue 点,并且定理2.11的证明中的 $B(f,x)<+\infty$.因为 $B(f,x)\in L(G)$,从而对几乎所有的 $x\in G$ 均有 x 是 f 的 Lebesgue 点,且有 $B(f,x)<+\infty$.这就证明了定理中的(3).

以下证明定理中的(2):由

$$\begin{aligned}&\|S_t^\phi(f,\cdot)-f(\cdot)\|_p\\ &\quad=\Big(\int_G|S_t^\phi(f,x)-f(x)|^p\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{p}},\end{aligned}$$

并由(2.57)式即得到

$$\begin{aligned}&\|S_t^\phi(f,\cdot)-f(\cdot)\|_p\\ &\quad\leqslant\int_G|K_t^\phi(y)|\cdot\|F_\cdot(y^{-1})\|_p\mathrm{d}y\\ &\qquad+|\phi(t\delta)-1|\cdot\|f\|_p.\end{aligned}\qquad(2.61)$$

因为

$$F_x(y)=|(\Pi_1f_x)(y)-f(x)|,$$

从而有

$$\|F_\cdot(y)\|_p\leqslant\|(\Pi_1f_\cdot)(y)\|_p+\|f\|_p.$$

再由

$$\|(\Pi_1 f_\cdot)(y)\|_p^p = \int_G |(\Pi_1 f_x)(y)|^p \mathrm{d}x$$

$$\leqslant \int_G \left(\int_G |f(xtyt^{-1})| \mathrm{d}t \right)^p \mathrm{d}x$$

$$\leqslant \int_G \int_G |f(xtyt^{-1})|^p \mathrm{d}x \mathrm{d}t$$

$$= \|f\|_p^p,$$

即$\|F_\cdot(y)\|_p$ 是 G 上的有界函数,再由

$$|\|F_\cdot(y)\|_p - \|F_\cdot(z)\|_p|$$

$$\leqslant \|F_\cdot(y) - F_\cdot(z)\|_p$$

$$\leqslant \left(\int_G |(\Pi_1 f_x)(y) - (\Pi_1 f_x)(z)|^p \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leqslant \left(\int_G \int_G |f(xtyt^{-1}) - f(xtzt^{-1})|^p \mathrm{d}t \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \left(\int_G \int_G |f(x) - f(xty^{-1}zt^{-1})|^p \mathrm{d}x \mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{p}},$$

从而当 $z \to y$ 时上式趋于零,即$\|F_\cdot(y)\|_p$ 是 G 上的连续函数. 再由$\|F_\cdot(e)\|_p = 0$,从以上关于(2.58)式的估计就得到

$$\lim_{t \to 0} \int_G |K_t^\phi(y)| \cdot \|F_\cdot(y^{-1})\|_p \mathrm{d}y = 0.$$

又因为 $\phi(0) = 0$和 ϕ 连续,由(2.61)式就证明了定理中的(2).

以下证明定理中的(4):将定理中的(3)的证明中的 $F_x^\cdot(y)$ 换成

$$F_x(y) = |(\Pi_1 f_x)(y)|, \tag{2.62}$$

则(2.58)及其后面的各式就给出了$|S_t^\phi(f,x)|$的估计.

由(2.58)式首先有

$$|S_t^\phi(f,x)| \leqslant I_1 + I_2 + I_3,$$

在(2.62)式条件下,

$$\int_Q |D(h)| F_x(\exp h) \mathrm{d}h$$

$$= |W| \cdot |Q| \int_G |D(y)|^{-1} |f(xy^{-1})| \mathrm{d}y \equiv Jf(x), \quad (2.63)$$

从而由(2.59)式，将其中常数简记为 A，则得到

$$\begin{aligned} I_3 &\leqslant At^{-n}\Psi_0(t^{-1}u)B(u)\Big|_{a_0}^{+\infty} \\ &\quad - At^{-n}\int_{a_0}^{\infty} B(u)\mathrm{d}\Psi_0(t^{-1}u) \\ &\leqslant \left[A\left(\frac{u}{t}\right)^n \Psi_0(t^{-1}u)\frac{B(u)}{u^n Jf(x)}\Bigg|_{a_0}^{+\infty} \right. \\ &\quad \left. - A\int_{a_0}^{\infty}\left(\frac{u}{t}\right)^n \mathrm{d}\Psi_0(t^{-1}u)\right] Jf(x) \\ &\leqslant A\int_0^{\infty} \Psi_0(u)u^{n-1}\mathrm{d}u Jf(x) = AJf(x). \end{aligned}$$

其中 A 是仅依赖于 G 的适当正常数，$u^n\Psi_0(u)$ 在$[0,+\infty)$上一致有界，而 J 是由 $|D(y)|^{-1}\in \mathrm{L}^2(G)$产生的卷积算子：

$$Jf = |D(\cdot)|^{-1} * f,$$

它是强(p,p)型$(p\geqslant 1)$的算子.

对 I_1+I_2的估计，只需将(2.60)式中的积分限由$[t,a_0]$换成$[0,a_0]$，则可得

$$\begin{aligned} I_1 + I_2 &\leqslant A\left(\frac{u}{t}\right)^n \Psi_0\left(\frac{u}{t}\right) \\ &\quad \times \left(\int_{|y|\leqslant u} |f(xy^{-1})| \mathrm{d}y/u^n\right)\Bigg|_0^{a_0} \\ &\quad + (-1)A\int_0^{a_0}\left(\frac{u}{t}\right)^n\left(\int_{|y|\leqslant u} |f(xy^{-1})|\mathrm{d}y/u^n\right)\mathrm{d}\Psi_0\left(\frac{u}{t}\right). \end{aligned}$$

由极大函数 Mf 的定义以及

$$\int_{|y|\leqslant u} \mathrm{d}u/u^n \leqslant A,$$

就得到了存在仅依赖于 G 的正常数 A，使得

$$I_1 + I_2 \leqslant AMf(x).$$

这就证明了定理中的(4).

而由 M 是弱(1,1)型和强(p,p)型的$(p>1)$以及算子 J 是强

(p,p)型的$(p\geqslant 1)$，就得到了定理中的(5). 于是完成了定理的全部证明. ▌

最后由(2.58)式的估计和(2.61)式，易得下面的推论：

推论 2.2 题设与定理2.12相同，则当 f 在 G 上连续时，$S_t^\phi(f,x)$一致收敛于 $f(x)$，其收敛速度被 f 的连续模和 ϕ 在原点的连续性所控制.

若将定理2.5中 $K_t^\phi(\exp h)$的定义式的右端除以 $\phi(t\delta)$，则在以上讨论中所有出现 $\phi(t\delta)$之处均代之以1，这时，推论2.2仍然成立.

§2.4 Riesz 位势与 Bessel 位势

Riesz 位势算子和 Bessel 位势算子是调和分析中重要的算子. 它们密切联系着流形上的 Laplace-Beltrami 算子. 在本节中，仍然讨论连通的紧致李群 G，并记 n 为 G 的实维数，r 为 G 的秩. 同时讨论连通的紧致齐性空间 $M=G/K$，并用 s 表示 M 的维数.

2.4.1 Riesz 位势与 Bessel 位势的定义

设 G 为紧致李群，Δ 是 G 的 Laplace-Beltrami 算子，$C^\infty(G)$是 G 上的 C^∞ 函数空间，则 Riesz 位势算子 I_α 和 Bessel 位势算子 J_α 就用 Laplace-Beltrami 算子定义为

$$I_\alpha=(-\Delta)^{-\frac{1}{2}\alpha},\quad J_\alpha=(|\delta|^2 I-\Delta)^{-\frac{1}{2}\alpha},$$

其中 $\mathrm{Re}\alpha>0$，I 是恒等算子，$\delta=\frac{1}{2}\sum_{\alpha>0}\alpha$.

对 $f\in C^\infty(G)$，f 的 Fourier 级数为

$$f(x)=\sum_{\lambda\in\hat{G}}d_\lambda\chi_\lambda*f(x),$$

则 I_α 和 J_α 在 $C^\infty(G)$上的作用是

$$(I_\alpha f)(x)=\Sigma'\mu_\lambda^{-\frac{1}{2}\alpha}d_\lambda\chi_\lambda*f(x),\tag{2.64}$$

$$(J_\alpha f)(x)=\Sigma'|\lambda+\delta|^{-\alpha}d_\lambda\chi_\lambda*f(x),\tag{2.65}$$

其中，Σ'表示对不等于零的所有 $\lambda\in\hat{G}$求和，而$-\mu_\lambda$是§1.5节中命题1.20给出的 Laplace 算子的特征值.

当 M 为连通的紧致齐性空间,Δ 为 M 的 Laplace-Beltrami 算子时,M 上的 Riesz 位势 I_α 和 Bessel 位势 J_α 的定义与(2.64)、(2.65)式相同,为

$$I_\alpha = (-\Delta)^{-\frac{1}{2}\alpha},\quad J_\alpha = (|\delta|^2 I - \Delta)^{-\frac{1}{2}\alpha}.$$

其中 $\mathrm{Re}\alpha>0$,I 是恒等算子,$\delta=\dfrac{1}{2}\sum\limits_{\alpha>0}\alpha$ 是全体正根之和的一半.

对于 $f\in C^\infty(M)$,f 的 Fourier 级数为

$$f(m) = \sum_{\lambda\in\hat{M}} d_\lambda\chi_\lambda * f(m).$$

则 I_α 和 J_α 在 $C^\infty(M)$上的作用是

$$(I_\alpha f)(m)= \Sigma'\mu_\lambda^{-\frac{1}{2}\alpha}d_\lambda\chi_\lambda * f(m),$$
$$(J_\alpha f)(m)= \Sigma'|\lambda+\delta|^{-\alpha}d_\lambda\chi_\lambda * f(m),$$

其中 Σ' 表示对不等于零的所有 $\lambda\in\hat{M}$ 求和,$-\mu_\lambda$ 是§1.5节命题1.21给出的 Laplace 算子的特征值.

2.4.2 Bessel 位势的核函数

由(2.64)式和(2.65)式可以看出 Riesz 位势算子 I_α 和 Bessel 位势算子 J_α 在 $C^\infty(M)$上的作用,分别可看作广义函数 $I_\alpha(x)$和 $J_\alpha(x)$在 $C^\infty(M)$上产生的卷积算子的作用,它们被称为 I_α 和 J_α 的核函数,其 Fourier 级数是

$$\begin{aligned} I_\alpha(x) &\overset{S'}{=\!=} \Sigma'\mu_\lambda^{-\frac{1}{2}\alpha}d_\lambda\chi_\lambda(x), \\ J_\alpha(x) &\overset{S'}{=\!=} \Sigma'|\lambda+\alpha|^{-\alpha}d_\lambda\chi_\lambda(x). \end{aligned} \tag{2.66}$$

在本节中要证明 $J_\alpha(x)$实际上是 G 上的可积函数,它的 Fourier 级数就是(2.66)式.

定理 2.13 若 $\mathrm{Re}\alpha>0$,则 Bessel 位势算子的核函数 $J_\alpha(x)$是紧致李群 G 上的可积函数,且在 $G\setminus\{e\}$上 $J_\alpha(x)$是 C^∞ 函数,在幺元 e 处 $J_\alpha(x)$的奇性的主要部分是 $F_\alpha(x)$,它适合:

$$F_\alpha(x) = \begin{cases} C_\alpha|x|^{\alpha-n}\log|x|, & \text{若 } \alpha-n=0,2,4,\cdots; \\ C_\alpha|x|^{\alpha-n}, & \text{其他情形}. \end{cases}$$

其中 $|x|$表示 $x\in G$ 到幺元 e 间的 Riemann 距离.

证明 考虑下面的积分

$$I = \int_0^a t^{\alpha-1} J_l(tv)(tv)^{-l} dt,$$

其中 $J_l(x)$ 是 $l=\frac{1}{2}r-1$ 阶的 Bessel 函数. 用 Bessel 函数的导数公式

$$\frac{d}{dz}(z^s J_s(z)) = z^s J_{s-1}(z)$$

对 I 进行分部积分,并记

$$H(2b,k) = 2^k \Gamma(b+k)\Gamma(b)^{-1},$$

其中 $\Gamma(x)$ 是 Γ-函数,则可得

$$\begin{aligned} I = {} & v^{-\alpha}\sum_{k=0}^{p-1} H(r-\alpha,k)(av)^{\alpha-\frac{1}{2}r-k} \\ & \times J_{\frac{1}{2}r+k}(av) \\ & + H(r-\alpha,p)v^{-\alpha} \\ & \times \int_0^{av} t^{\alpha-\frac{1}{2}r-p} J_{\frac{1}{2}r+p-1}(t)dt. \end{aligned} \tag{2.67}$$

由 Bessel 函数的 Hankel 积分公式

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty e^{-at} J_s(bt) t^{\mu-1} dt \\ & = \frac{\Gamma(\mu+s)}{\Gamma(s+1)}\left(\frac{b}{2}\right)^s (a^2+b^2)^{-\frac{\mu+s}{2}} \\ & \quad \times F\left(\frac{s+\mu}{2}, \frac{s-\mu+1}{2}, s+1, \frac{b^2}{a^2+b^2}\right), \end{aligned}$$

其中 $F(\alpha,\beta,\gamma,z)$ 是超几何函数,由超几何函数的公式

$$F(\alpha,\beta,\gamma,1) = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}$$

可以得到

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty t^{\alpha-\frac{1}{2}r-p} J_{\frac{1}{2}r+p-1}(t)dt \\ & = \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}r+p\right)} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}r+p-1} \end{aligned}$$

$$\times F\left(\frac{1}{2}\alpha,\frac{1}{2}(r-\alpha-1)+p,\frac{1}{2}r+p,1\right)$$

$$=\frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}r+p\right)}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}r+p-1}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}r+p\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}(r-\alpha)+p\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}(\alpha+1)\right)},\tag{2.68}$$

由此得

$$H(r-\alpha,p)\int_0^\infty t^{\alpha-\frac{1}{2}r-p}J_{\frac{1}{2}r+p-1}(t)\mathrm{d}t$$
$$=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}(r-\alpha)\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}(\alpha+1)\right)}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}r-1}$$
$$=(b_\alpha)^{-1}.\tag{2.69}$$

将(2.69)式代入(2.67)式，得到

$$v^{-\alpha}=b_\alpha\left\{I-v^{-\alpha}\sum_{k=0}^{p-1}H(r-\alpha,k)\right.$$
$$\times(av)^{\alpha-\frac{1}{2}r-k}J_{\frac{1}{2}r+k}(av)$$
$$+H(r-\alpha,p)v^{-\alpha}$$
$$\left.\times\int_{av}^\infty t^{\alpha-\frac{1}{2}r-p}J_{\frac{1}{2}r+p-1}(t)\mathrm{d}t\right\}.\tag{2.70}$$

由 Bessel 函数的 Sonine 的有限积分公式

$$\int_0^1 J_s(zt)t^{s+1}(1-t^2)^k\mathrm{d}t$$
$$=2^k\Gamma(k+1)J_{s+k+1}(z)/z^{k+1},$$

(2.70)式就可写成

$$v^{-\alpha}=b_\alpha\left(I-\sum_{k=0}^{p-1}B_k\int_0^1\frac{J_s(avt)}{(avt)^s}t^{2s+1}\left(1-\frac{t^2}{a^2}\right)^k\mathrm{d}t\right)+C_p(v)$$
$$=b_\alpha\left(I-\sum_{k=0}^{p-1}B_k'\int_0^a\frac{J_s(vt)}{(vt)^s}t^{2s+1}\left(1-\frac{t^2}{a^2}\right)^k\mathrm{d}t\right)+C_p(v)$$

$$= b_\alpha \int_0^a \frac{\mathrm{J}_s(vt)}{(vt)^s} t^{2s+1} \left(t^{\alpha-r} - \sum_{k=0}^{p-1} B'_k \left(1 - \frac{t^2}{a^2}\right)^k \right) \mathrm{d}t + C_p(v)$$

$$\equiv \int_0^\infty \frac{\mathrm{J}_s(vt)}{(vt)^s} t^{2s+1} f_a(t) \mathrm{d}t + C_p(v), r = 2s + 2. \tag{2.71}$$

在(2.71)式中

$$f_a(t) = \begin{cases} b_\alpha \left(t^{\alpha-r} - \sum\limits_{k=0}^{p-1} B'_k \left(1 - \dfrac{t^2}{a^2}\right)^k \right), & 若\ 0 < t < a; \\ 0, & 若\ t \geqslant a, \end{cases} \tag{2.72}$$

$$\begin{aligned} B'_k &= a^{-r} B_k \\ &= a^{\alpha-r} \Gamma\left(k + \frac{1}{2}(r-\alpha)\right) \Big/ \left(\Gamma(k+1) \Gamma\left(\frac{1}{2}(r-\alpha)\right) \right), \end{aligned}$$

$$C_p(v) = b_\alpha H(r-\alpha, p) v^{-\alpha} \times \int_{av}^\infty t^{\alpha - \frac{1}{2}r - p} \mathrm{J}_{\frac{1}{2}r + p - 1}(t) \mathrm{d}t,$$

且容易验证，存在仅依赖于 G、p、α 和 a 的正数 A_p，使下式成立：

$$|C_p(v)| \leqslant A_p v^{-\frac{1}{2}r - p},\ v \neq 0. \tag{2.73}$$

现在取 $a > 0$，使指数映射 exp 为 $\{|h| < 2a\}$ 到 G 的 Cartan 子群 T 中的可微的嵌入，且当 $|h| \leqslant a$ 时，有

$$1 \leqslant \mathrm{i}^m P(h) D(h)^{-1} \leqslant a_1 < +\infty. \tag{2.74}$$

通过对径向函数 Fourier 变换的具体计算，可得到(2.71)式第四个等号右端的积分就等于 $f_a(|h|)$的 Fourier 变换，从而得到

$$|\lambda + \delta|^{-\alpha} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}r}} \int_{\mathfrak{h}} f_a(|h|) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\lambda+\delta, h)} \mathrm{d}h + C_p(|\lambda + \delta|). \tag{2.75}$$

当 $\alpha - r = 0, 2, 4, \cdots$ 时，(2.67)式经过有限步就终止了，从而(2.68)以后各式均不成立. 这就要考虑新的积分. 设这时

$$\alpha - r = 2b - 2 = 0, 2, 4, \cdots, \tag{2.76}$$

其中 b 为正整数，仍取 $s = \frac{1}{2}r - 1$，考虑积分

$$J = \int_0^a t^{\alpha-1} \mathrm{J}_{s+b}(tv)(tu)^{-s-b} \mathrm{d}t.$$

同对前面 I 的计算一样，现在可得

$$v^{-\alpha} = b_\alpha\left\{\mathrm{J} - \sum_{k=0}^{p-1} B_k \int_0^a \frac{J_s(vt)}{(ut)^s} t^{2s+1}\left(1 - \frac{t^2}{a^2}\right)^{k+b} \mathrm{d}t\right\} + C_p(v). \tag{2.77}$$

其中

$$\begin{aligned} b_\alpha &= 2^{\frac{1}{2}r+b-1}\Gamma\left(\frac{1}{2}(r+2b-\alpha)\right) \\ &\quad \times \Gamma\left(\frac{1}{2}(\alpha+1)\right)\Big/\left(\Gamma(\alpha)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right), \\ B_k &= a^{\alpha-r}\Gamma(k+1)/(2^b\Gamma(k+b+1)), \\ C_p(v) &= b_\alpha H(r+2b-\alpha, p)v^{-\alpha} \\ &\quad \times \int_{av}^{\infty} t^{\alpha-\frac{1}{2}r-b-p} \mathrm{J}_{\frac{1}{2}r+b+p-1}(t)\mathrm{d}t, \end{aligned}$$

且容易验证，存在仅依赖于 G、p、α 和 a 的正数 A_p，使下式成立：

$$|C_p(v)| \leqslant A_p v^{-\frac{1}{2}r-b-p}. \tag{2.78}$$

以下证明存在 $\mathfrak{h}$ 上的径向函数 $B_\alpha(|h|)$，它的 Fourier 变换就等于 J. 实际上，令

$$B_\alpha(|h|) = \begin{cases} \dfrac{1}{(2\pi)^b}\displaystyle\int_{|x| \leqslant (a^2-|h|^2)^{\frac{1}{2}}} (|h|^2 + |x|^2)^{-1}\mathrm{d}x, \\ \qquad\qquad 若\ 0 < |h| < a; \\ 0, \qquad\quad 若\ |h| \geqslant a. \end{cases} \tag{2.79}$$

其中 $\{x \in \mathrm{R}^{2b}, |x|^2 \leqslant a^2 - |h|^2\}$ 是 $2b$ 维欧氏空间 R^{2b} 中半径为 $(a^2 - |h|^2)^{\frac{1}{2}}$ 的球.

当 $\lambda+\delta \in \mathfrak{h}^*$ 是 $\mathfrak{h}$ 上的线性函数时，它自然可延拓为 $\mathrm{R}^{r+2b} = \mathfrak{h} \oplus \mathrm{R}^{2b}$ 上的线性函数，使得对 $x \in \mathrm{R}^{2b}$，$h \in \mathfrak{h}$，$y = (h, x) \in \mathfrak{h} \oplus \mathrm{R}^{2b}$ 有

$$(\lambda+\delta, y) = (\lambda+\delta, (h, x)) = (\lambda+\delta, h)$$

成立. 从而可得

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}r}}\int_{\mathfrak{h}} B_\alpha(|h|)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\lambda+\delta, h)}\mathrm{d}h$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}r+b}} \int_{|h|^2+|x|^2 \leqslant a^2} (|h|^2 + |x|^2)^{-1} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}((\lambda+\delta,(h,x)))} \mathrm{d}h \mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}r+b}} \int_{|y|<a} |y|^{-2} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\lambda+\delta,y)} \mathrm{d}y$$

$$= \int_0^a t^{\alpha-1} J_{s+b}(|\lambda+\delta|t)(|\lambda+\delta|t)^{-(s+b)} \mathrm{d}t$$

$$= J,$$

因为 $r+2b-1-2=\alpha-1$. 由此导致(2.77)式变为

$$|\lambda+\delta|^{-\alpha} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}r}} \int_b \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\lambda+\delta,h)} f_\alpha(|h|) \mathrm{d}h + C_p(|\lambda+\delta|), \tag{2.80}$$

其中

$$f_\alpha(|h|) = \begin{cases} b_\alpha\left(B_\alpha(|h|) - \sum_{k=0}^{p-1} B_k \left(1 - \frac{|h|^2}{a^2}\right)^{k+b} \right), \\ \qquad \text{若 } |h| < a; \\ 0, \qquad \text{若 } |h| \geqslant a. \end{cases} \tag{2.81}$$

对(2.79)式定义的 $B_\alpha(|h|)$ 作具体计算，得到

$$B_\alpha(|h|) = \frac{1}{(2\pi)^b} \int_{|x|^2 \leqslant a^2 - |h|^2} (|h|^2 + |x|^2)^{-1} \mathrm{d}x$$

$$= \frac{\omega_{2b-1}}{(2\pi)^b} \int_0^{\sqrt{a^2-|h|^2}} (|h|^2 + u^2)^{-1} u^{2b-1} \mathrm{d}u$$

$$= \frac{\omega_{2b-1}}{(2\pi)^b} \cdot \frac{1}{2} \int_0^{a^2-|h|^2} (|h|^2 + u)^{-1} u^{b-1} \mathrm{d}u. \tag{2.82}$$

记 $u = |h|^2 + u - |h|^2$，则有

$$u^{b-1} = \sum_{k=0}^{b-1} C_{b-1}^k (-|h|^2)^{b-1-k} (|h|^2 + u)^k,$$

其中　　$C_{b-1}^k = (b-1)!/(k!(b-1-k)!)$.

则(2.82)式就等于

$$B_\alpha(|h|) = \frac{1}{2^b \Gamma(b)} \sum_{k=0}^{b-1} C_{b-1}^k (-|h|^2)^{b-1-k} \int_0^{a^2-|h|^2} (|h|^2 + u)^{k-1} \mathrm{d}u$$

$$= \frac{1}{2^b\Gamma(b)}(-|h|^2)^{b-1}2\log\frac{a}{|h|}$$

$$+ \frac{1}{2^b\Gamma(b)}\sum_{k=1}^{b-1}C_{b-1}^k(-|h|^2)^{b-1-k}\frac{1}{k}(a^{2k}-|h|^{2k})$$

$$= \frac{(-1)^b}{2^{b-1}\Gamma(b)}|h|^{2b-2}\log|h| + \frac{(-1)^{b-1}}{2^{b-1}\Gamma(b)}|h|^{2b-2}\log a$$

$$+ \frac{1}{2^b\Gamma(b)}\sum_{k=1}^{b-1}C_{b-1}^k\frac{1}{k}(-|h|^2)^{b-1-k}(a^{2k}-|h|^{2k}). \tag{2.83}$$

定义 G 上的中心函数 $J_\alpha^{(1)}(x)$ 和 $J_\alpha^{(2)}(x)$ 如下：

$$J_\alpha^{(1)}(\exp h) = \frac{(-\mathrm{i})^m|Q|}{(2\pi)^{\frac{1}{2}r}p(\delta)}D(h)^{-1}P\left(\frac{\partial}{\partial h}\right)\{f_\alpha(|h|)\},$$

$$h\in Q, \tag{2.84}$$

$$J_\alpha^{(2)}(x) = \sum_{\lambda\in\hat{G}}C_p(|\lambda+\delta|)d_\lambda\chi_\lambda(x), \tag{2.85}$$

其中当 $\alpha-r\neq 0,2,4,\cdots$ 时，$f_\alpha(|h|)$ 由(2.72)式定义，$0\neq\lambda\in\hat{G}$ 时的 $C_p(|\lambda+\delta|)$ 由(2.71)式定义．当 $\alpha-r=0,2,4,\cdots$ 时，$f_\alpha(|h|)$ 由(2.81)式定义，$0\neq\lambda\in\hat{G}$ 时的 $C_p(|\lambda+\delta|)$ 由(2.77)式定义，而 $C_p(|\delta|)$ 定义为

$$C_p(|\delta|) = -\int_G J_\alpha^{(1)}(x)\mathrm{d}x. \tag{2.86}$$

由(2.72)式和(2.81)式，$f_\alpha(|h|)$ 支集包含在 Q 内，且因 $\mathrm{Re}\alpha>0$，$f_\alpha(|h|)$ 在 Q 上可积．令 G 上的中心函数 $J_\alpha(x)$ 为

$$J_\alpha(x) = J_\alpha^{(1)}(x) + J_\alpha^{(2)}(x). \tag{2.87}$$

则由(2.75)式和(2.80)式作为 $C^\infty(G)$ 上的广义函数，$J_\alpha(x)$ 的 Fourier 级数就是(2.66)式．以下证明 $J_\alpha(x)$ 在 G 上可积，这就要讨论 $f_\alpha(|h|)$ 的偏导数．先看如下引理：

引理 2.7　设 $H\in\mathfrak{h}$，D_H 是方向 H 的方向导数，$f(t)$ 是 $[0,+\infty)$ 上定义的函数，则有

$$(D_H\{f(|h|)\})(h) = (H,h)\left(\frac{\mathrm{d}}{t\mathrm{d}t}f\right)(|h|).$$

由此可得 $f(|h|)$在 $\mathfrak{h}$ 上具有直到 N 阶的所有连续偏导数的充分条件是:

$$\left(\left(\frac{\mathrm{d}}{t\mathrm{d}t}\right)^s f\right)(t) \quad (s=0,1,\cdots,N)$$

在$[0,+\infty)$上连续,而 $f(|h|)$在 $\mathfrak{h}\backslash\{0\}$上具有直到 N 阶的所有连续偏导数的充分条件是:

$$\left(\left(\frac{\mathrm{d}}{t\mathrm{d}t}\right)^s f\right)(t) \quad (s=0,1,\cdots,N)$$

在$(0,+\infty)$上连续.

其中$(\cdot,\cdot)$是 $\mathfrak{g}$ 上的 G 不变内积.

引理2.7由复合函数求导公式即可证明.

由引理2.7立即可得到由(2.72)式和(2.81)式定义的$f_\alpha(|h|)$在 $\mathfrak{h}\backslash\{0\}$上偏导数的连续性由$\left(\left(\frac{\mathrm{d}}{t\mathrm{d}t}\right)^s f_\alpha\right)(t)$在$0<t<a$ 且 $t\to a$ 时$\left(\left(\frac{\mathrm{d}}{t\mathrm{d}t}\right)^s f_\alpha\right)(t)\to 0$所保证.

引理 2.8 设 $\alpha-r\neq 0,2,4,\cdots$, $f_\alpha(|h|)$由(2.72)式定义,则 $f_\alpha(|h|)$在 $\mathfrak{h}\backslash\{0\}$上具有直到 $N=p-1$阶的所有的连续偏导数. 对 $s=0,1,2,\cdots,p-1$,记

$$\left(\left(\frac{\mathrm{d}}{t\mathrm{d}t}\right)^s f_\alpha\right)(|h|) = b_{\alpha,s} f_{\alpha,s}(|h|),$$

则有

$$f_{\alpha,s}(|h|) = \begin{cases} |h|^{\alpha-r-2s} - \sum\limits_{k=0}^{p-s-1} B(k,s)\left(1-\frac{|h|^2}{a^2}\right)^k, \\ \qquad\qquad 若\ |h|<a; \\ 0, \qquad\quad 若\ |h|\geqslant a. \end{cases}$$

其中

$$b_{\alpha,s} = (-1)^s 2^{\frac{1}{2}r+s-1}\Gamma\left(\frac{1}{2}(r+2s-\alpha)\right)$$

$$\times\Gamma\left(\frac{1}{2}(\alpha+1)\right)\Big/\left(\Gamma(\alpha)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right),$$

$$B(k,s)=a^{\alpha-r-2s}\Gamma\left(k+\frac{1}{2}(r+2s-\alpha)\right)\Big/\left(\Gamma(k+1)\Gamma\left(\frac{1}{2}(r+2s-\alpha)\right)\right).$$

证明 由引理2.7，只须对(2.72)式关于 t 求导，则有

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{t\mathrm{d}t}\right)^s(t^{\alpha-r})=(-2)^s\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}(r+2s-\alpha)\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}(r-\alpha)\right)}t^{\alpha-r-2s},$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{t\mathrm{d}t}\right)^s\left\{\left(1-\frac{t^2}{a^2}\right)^k\right\}=\left(\frac{-2}{a^2}\right)^s\frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-s+1)}\left(1-\frac{t^2}{a^2}\right)^{k-s}.$$

将上面两式代入(2.72)式中 $f_a(t)$ 的求导中，并将 $k-s$ 换成 k 就得到了引理中的 $f_{a,s}(|h|)$ 和 $b_{a,s}$. 又当$0<t<a$ 且 $t\to a$ 时，$f_{a,s}(t)$ 的极限等于

$$a^{\alpha-r-2s}-B(0,s)=0.$$

从而由引理2.7就证明了引理2.8. ▌

引理 2.9 设 $\alpha-r=0,2,4,\cdots$，$f_a(|h|)$ 由(2.81)式定义. 则 $f_a(|h|)$ 在 $\mathfrak{h}\backslash\{0\}$ 上具有直到 $N=p+b-1$ 阶的所有的连续偏导数. 若记 $s=0,1,2,\cdots$时，有

$$\left(\left(\frac{\mathrm{d}}{t\mathrm{d}t}\right)^s f_a\right)(|h|)=b_{a,s}f_{a,s}(|h|),$$

则有以下结论成立：

(1) 若 $s=0,1,\cdots,b-1$，则有 $b_{a,s}=b_a$，

$$f_{a,s}(|h|)=\begin{cases}0, & 若\ |h|\geqslant a;\\ B_{a,s}(|h|)-\sum\limits_{k=0}^{p-1}B(k,s)\left(1-\dfrac{|h|^2}{a^2}\right)^{k+b-s}, & 若\ |h|<a,\end{cases}$$

其中

$$B_{\alpha,s}(|h|)\equiv\left(\left(\frac{\mathrm{d}}{t\mathrm{d}t}\right)^{s}B_{\alpha}\right)(|h|)$$
$$=\frac{(-1)^{b}|h|^{2b-2-2s}}{2^{b-1-s}\Gamma(b-s)}\log|h|$$
$$+h\text{ 的 }2b-2-2s\text{ 次多项式},$$
$$B(k,s)=(-1)^{s}a^{\alpha-r-2s}\Gamma(k+1)/(2^{b-s}\Gamma(k+b+1-s)).$$

(2) 若 $s=b,b+1,\cdots$,则 $b_{\alpha,s}$和 $f_{\alpha,s}(|h|)$的表达式与引理2.8相同.

证明　由引理2.7,对(2.81)式的 $f_{\alpha}(|h|)$求导,可得

$$\left(\left(\frac{\mathrm{d}}{t\mathrm{d}t}\right)^{s}f_{\alpha}\right)(|h|)$$
$$=b_{\alpha}\left[B_{\alpha,s}(|h|)-\sum_{k=0}^{b-1}B_{k}\left(\left(\frac{\mathrm{d}}{t\mathrm{d}t}\right)^{s}\left(1-\frac{(\cdot)^{2}}{a^{2}}\right)^{k+b}\right)(|h|)\right]$$
$$=b_{\alpha}\left[B_{\alpha,s}(|h|)\right.$$
$$\left.-\sum_{k=0}^{b-1}B_{k}\left(\frac{-2}{a^{2}}\right)^{s}\frac{\Gamma(k+b+1)}{\Gamma(k+b-s+1)}\left(1-\frac{|h|^{2}}{a^{2}}\right)^{k+b-s}\right]\tag{2.88}$$

对引理中的(1),当 $s=0,1,\cdots,b-1$时,(2.88)式第二个等式右端的级数每一项中$1-|h|^{2}/a^{2}$的幂为 $k+b-s\geqslant1$. 从而$0<|h|<a$ 且$|h|\to a$ 时其极限为零.而对 $B_{\alpha,s}(|h|)$,从(2.83)式第三个等式右端求导,易见,除去导数中的项

$$\frac{(-1)^{b}}{2^{b-1}\Gamma(b)}\left(\left(\frac{\mathrm{d}}{t\mathrm{d}t}\right)(\cdot)^{2b-2}\right)(|h|)\log|h|$$
$$=\frac{(-1)^{b}}{2^{b-1-s}\Gamma(b-s)}|h|^{2b-2-2s}\log(|h|)$$

以外,导数中的其余项组成了 h 的$2b-2-2s$ 次多项式.

为了求 $s\leqslant b-1$时 $B_{\alpha,s}(|h|)$在$0<|h|<a$ 且 $|h|\to a$ 时的极限,只需对(2.82)式第三个等式右端的积分求导,易见

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{t\mathrm{d}t}\left(\int_{0}^{a^{2}-t^{2}}(t^{2}-u)^{-1}u^{b-1}\mathrm{d}u\right)\right)(|h|)$$

$$= -2a^{-2}(a^2 - |h|^2)^{b-1}$$
$$- 2\int_0^{a^2-|h|^2}(|h|^2 + u)^{-2}u^{b-1}\mathrm{d}u.$$

对上式继续求导，由归纳法可证明当 $s=1,2,\cdots,b-1$时，有

$$\left(\left(\frac{\mathrm{d}}{t\mathrm{d}t}\right)^s B_a\right)(|h|) = \sum_{k=0}^{s-1} C_k(a^2 - |h|^2)^{b+k-s}$$
$$+ A_0\int_0^{a^2-|h|^2}(|h|^2 + u)^{-s-1}u^{b-1}\mathrm{d}u.$$

从而易得，当$0<|h|<a$ 且$|h|\to a$ 时，有

$$\left(\left(\frac{\mathrm{d}}{t\mathrm{d}t}\right)^s B_a\right)(|h|) \to 0.$$

这就证明了(1)及引理对 $s=0,1,\cdots,b-1$成立.

当 $s=b$ 时，由引理的(1)继续求导，即得到

$$\left(\left(\frac{\mathrm{d}}{t\mathrm{d}t}\right)^b B_a\right)(|h|) = (-1)^b|h|^{-2},\quad 0<|h|<a.$$

再由(2.88)式和(2.77)式中 B_k 的值，就可得到当$0<|h|<a$ 时，有

$$\left(\left(\frac{\mathrm{d}}{t\mathrm{d}t}\right)^b f_a\right)(|h|)$$
$$= (-1)^b b_a\left(|h|^{-2} - \sum_{k=0}^{p-1} a^{-2}\left(1 - \frac{|h|^2}{a^2}\right)^k\right). \quad (2.89)$$

将(2.89)式右端按引理的要求记为 $b_{a,b}f_{a,b}(|h|)$，则当$0<|h|<a$时，有

$$f_{a,b}(|h|) = |h|^{-2} - \sum_{k=0}^{p-1} a^{-2}\left(1 - \frac{|h|^2}{a^2}\right)^k$$
$$= |h|^{\alpha-r-2b} - \sum_{k=0}^{p-1} B(k,b)\left(1 - \frac{|h|^2}{a^2}\right)^k,$$

从而显然有

$$B(k,b) = a^{-2} = a^{\alpha-r-2b}$$
$$= a^{\alpha-r-2b}\Gamma\left(k + \frac{1}{2}(r + 2b - \alpha)\right)$$

$$\div \Gamma(k+1)\Gamma\left(\frac{1}{2}(r+2b-\alpha)\right).$$

因为 $\alpha-r-2b=-2$，即$\frac{1}{2}(r+2b-\alpha)=1$. 易见，这就是引理2.8中 $f_{\alpha,b}(|h|)$的表达式（当$0<|h|<a$ 时）.

由(2.77)式

$$b_{\alpha,b}=(-1)^b b_\alpha$$

$$=(-1)^b 2^{\frac{1}{2}r+b-1}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}(r+2b-\alpha)\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}(\alpha+1)\right)}{\Gamma(\alpha)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)},$$

则易见它也等于引理2.8中的 $b_{\alpha,b}$的表达式，再对上面的$b_{\alpha,b}f_{\alpha,b}(|h|)$继续求导，就易验证引理中的(2)的结论. 最后在$0<|h|<a$，$|h|\to a$时，对 $s\geqslant b$，

$$\left(\left(\frac{\mathrm{d}}{t\mathrm{d}t}\right)^s f_\alpha\right)(|h|)\to 0$$

的证明就与引理2.8的证明完全相同，于是完成了引理的证明. ▌

由上面的三个引理及定理2.7就得到了由(2.84)式定义的 $J_\alpha^{(1)}(\exp h)$等于

$$\begin{aligned}J_\alpha^{(1)}(\exp h)&=A_G D(h)^{-1}P\left(\frac{\partial}{\partial h}\right)\{f_\alpha(h)\}\\&=A_G D_0(h)^{-1}\left(\left(\frac{\mathrm{d}}{t\mathrm{d}t}\right)^m f_\alpha\right)(|h|)\\&=A_G b_{\alpha,m}D_0(h)^{-1}f_{\alpha,m}(|h|),\end{aligned}\tag{2.90}$$

其中 $D_0(h)$如(2.18)式所定义，$A_G=(-\mathrm{i})^m|Q|\Big/\left((2\pi)^{\frac{1}{2}r}P(\delta)\right)$，$b_{\alpha,m}$和 $f_{\alpha,m}(|h|)$由引理2.8和引理2.9所定义.

设 $x\in G$，$|x|$表示 $x\in G$ 到 G 的幺元间的 Riemann 距离. 又设 $x=\exp X$，$X\in\mathfrak{g}$，且 X 属于 G 关于幺元 e 的切割迹内部 Ω_0，特别是，若$|X|\leqslant a$，就有

$$|x|=|\exp X|=|X|$$

成立. 再设 $x=y\exp hy^{-1}$，$h\in\mathfrak{h}$，且$|h|\leqslant a$，则又有

$$|x| = |y\exp hy^{-1}| = |\exp h| = |h|$$

成立. 又因为 $D_0(h)$是 Weyl 群对称的函数,从而它唯一地定义了 $\mathfrak{g}$ 上的中心函数,将它记为 $D_0(X)$,当 X 属于幺元 e 点的切割迹内部时,就可定义 G 上的中心函数 $D_0(x)$,使适合

$$D_0(x) = D_0(X), \text{若 } x = \exp X, X \in \Omega_0.$$

于是就得到

$$J_\alpha^{(1)}(x) = A_G b_{\alpha,m} D_0(x)^{-1} f_{\alpha,m}(|x|). \tag{2.91}$$

当 $\alpha-n\neq 0,2,4,\cdots$时,或者 $\alpha-r\neq 0,2,4,\cdots$,或者 $\alpha-r=2b-2=0,2,\cdots,2m-2$时,由引理2.8和引理2.9中的(2),就得到了 $J_\alpha^{(1)}(\exp)$在 $T\setminus\{e\}$上也就是 $Q\setminus\{0\}$上至少具有直到 $p-n$ 阶的各阶连续偏导数,且它的支集在$\{|h|<a\}\subset\frac{1}{2}Q$ 之中. 它在 $h=0$附近的奇性的主要部分是由$|h|^{\alpha-r-2m}=|h|^{\alpha-n}$所产生的. 由上面的说明和(2.91)式就得到 $J_\alpha^{(1)}(x)$在幺元附近的奇性的主要部分就是 $C_\alpha|x|^{\alpha-n}$.

当 $\alpha-n=0,2,4,\cdots$时,由 $\alpha-n=2b-2$求得 $b\geqslant m+1$,由引理2.9的(1)就得到 $J_\alpha^{(1)}(\exp h)$在 $h\neq 0$处具有直到 $p-n$ 阶的各阶连续偏导数及 $J_\alpha^{(1)}(x)$在幺元附近的奇性的主要部分是

$$C_\alpha|x|^{\alpha-n}\log|x|.$$

再由 $\mathrm{Re}\alpha>0$和中心函数积分公式,容易验证 $J_\alpha^{(1)}(x)$在 G 上可积.

讨论 $J_\alpha^{(1)}(x)$在 $G\setminus\{e\}$上的可微性:设 $Y_1,\cdots,Y_s\in\mathfrak{g}$,$\tilde{Y}_1,\cdots,\tilde{Y}_s$是它们对应的 G 上的左不变向量场. 又设 $x=y\exp hy^{-1}$. 由于(1.10)式和 $J_\alpha^{(1)}(x)$是 G 上的中心函数,可得

$$\begin{aligned}
&(\tilde{Y}_1\cdots\tilde{Y}_s J_\alpha^{(1)})(x)\\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t_1}\cdots\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t_s} J_\alpha^{(1)}(x\exp t_s Y_s\cdots\exp t_1 Y_1)\Big|_{t=0}\\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t_1}\cdots\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t_s} J_\alpha^{(1)}(\exp h\cdot\exp t_s X_s\cdots\exp t_1 X_1)\Big|_{t=0}\\
&= (\tilde{X}_1\cdots\tilde{X}_s J_\alpha^{(1)})(x),
\end{aligned}$$

其中 $X_j=Ad y^{-1}(Y_j)$, $j=1,2,\cdots,s$.

以下只需讨论在 $\exp h\neq e$ 点处 $J_\alpha^{(1)}(x)$ 的导数：设

$$\exp h\cdot\exp t_1Y_1\cdots\exp t_sY_s=y(t)\exp h(t)y(t)^{-1},$$

其中 $t=(t_1,\cdots,t_s)$，则有

$$\begin{aligned}(\widetilde{Y}_s,\cdots,\widetilde{Y}_1J_\alpha^{(1)})(\exp h)&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t_s}\cdots\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t_1}J_\alpha^{(1)}(\exp h\cdot\exp t_1Y_1\cdots\exp t_sY_s)\bigg|_{t=0}\\&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t_s}\cdots\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t_1}J_\alpha^{(1)}(\exp h(t))\bigg|_{t=0}.\end{aligned}\tag{2.92}$$

因为 $\exp h\cdot\exp t_1Y_1\cdots\exp t_sY_s$ 是 G 中过 $\exp h$ 点的实解析映照，由于乘法函数也是实解析的，所以 $h(t)$ 是过 $h\in Q$ 点的实解析映照，即可得

$$h(t)=h+\sum_j t_jH_j+\cdots+\sum_{j_1,\cdots,j_s}t_{j_1}\cdots t_{j_s}H_{j_1,\cdots,j_s}+O(|t|^{s+1}).$$

设 $H_1,\cdots,H_r$ 是 $\mathfrak{h}$ 的一组幺正基，$\widetilde{H}_1,\cdots,\widetilde{H}_r$ 是它们对应的 G 上的左不变向量场，则上面的 $h(t)$ 的幂级数展开式说明了存在 $\widetilde{H}_1,\cdots,\widetilde{H}_r$ 的一个 s 次多项式 $P_s(\widetilde{H}_1,\cdots,\widetilde{H}_r)$ 使下式成立：

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t_s}\cdots\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t_1}J_\alpha^{(1)}(\exp h(t))\bigg|_{t=0}\\&\qquad=\left(P_s(\widetilde{H}_1,\cdots,\widetilde{H}_r)J_\alpha^{(1)}\right)(\exp h).\end{aligned}\tag{2.93}$$

再设 $(h_1,\cdots,h_r)$ 是 $\mathfrak{h}$ 上关于基 $H_1,\cdots,H_r$ 的直角坐标系，将 $J_\alpha^{(1)}(\exp h)$ 看作 $\mathfrak{h}$ 上的周期函数，即看作 $(J_\alpha^{(1)}\circ\exp)(h)$ 时，又有

$$\begin{aligned}&\left(P_s(\widetilde{H}_1,\cdots,\widetilde{H}_r)J_\alpha^{(1)}\right)(\exp h)\\&\qquad=\left(P_s\left(\frac{\partial}{\partial h_1},\cdots,\frac{\partial}{\partial h_r}\right)(J_\alpha^{(1)}\circ\exp)\right)(h).\end{aligned}$$

所以由(2.92)、(2.93)和上式以及引理2.8、引理2.9，就得到了 $J_\alpha^{(1)}(x)$ 在 $G\backslash\{e\}$ 上至少含有直到 $p-n$ 阶的各阶连续偏导数.

以下讨论 $J_\alpha^{(2)}(x)$ 的可微性，即讨论 $J_\alpha^{(2)}(x)$ 的 Fourier 级数

$$\sum_{\lambda\in\hat{G}}C_p(|\lambda+\delta|)d_\lambda\chi_\lambda(x)$$

及其 s 阶导级数

$$\Sigma' C_p(|\lambda+\delta|)d_\lambda\left(\widetilde{X}_{j_1}\cdots\widetilde{X}_{j_s}\chi_\lambda\right)(x)$$

的收敛性，其中 $j_1,\cdots,j_s=1,2,\cdots,n$，$\widetilde{X}_1,\cdots,\widetilde{X}_n$ 是 G 的李代数 $\mathfrak{g}$ 的幺正基 $X_1,\cdots,X_n$ 所对应的 G 上的左不变向量场.

由第1章的引理1.22，可得

$$\begin{aligned}&\left(\widetilde{X}_{j_1}\cdots\widetilde{X}_{j_s}\chi_\lambda\right)(x)\\&\quad=\mathrm{Tr}(\mathrm{d}\rho_\lambda(X_{j_1})\cdots\mathrm{d}\rho_\lambda(X_{j_s})\rho_\lambda(x)).\end{aligned}$$

用 $\|A\|$ 表示线性算子的范数，则 A 是方阵时，$\|A\|^2$ 就是 $A\overline{A}'$ 的最大特征值，当 A 是 $n\times n$ 方阵时，就有

$$|\mathrm{Tr}A|\leqslant n\|A\|.$$

另一方面知

$$\|AB\|\leqslant\|A\|\|B\|,$$

由此就得到

$$\left|\left(\widetilde{X}_{j_1}\cdots\widetilde{X}_{j_s}\chi_\lambda\right)(x)\right|\leqslant\|\mathrm{d}\rho_\lambda(X_{j_1})\|\cdots\|\mathrm{d}\rho_\lambda(X_{j_s})\|d_\lambda.$$

当 $X\in\mathfrak{g}$ 时，$\mathrm{d}\rho_\lambda(X)$ 是反 Hermite 阵，从而可得

$$\mathrm{d}\rho_\lambda(X)\,\overline{\mathrm{d}\rho_\lambda(X)}'=-\mathrm{d}\rho_\lambda(X)\mathrm{d}\rho_\lambda(X).$$

由上式以及第1章的§1.5中紧致李群上的 Casimir 算子与 Laplace-Beltrami 算子间的关系，可得

$$\sum_{k=1}^{n}-\mathrm{d}\rho_\lambda(X_k)\mathrm{d}\rho_\lambda(X_k)=\mu_\lambda I,$$

其中 I 是 d_λ 阶的单位阵.

上式表明了，对 $k=1,2,\cdots,n$

$$\|\mathrm{d}\rho_\lambda(X_k)\|\leqslant\mu_\lambda^{\frac{1}{2}}\leqslant|\lambda+\delta|.$$

从而可得

$$\left|\left(\widetilde{X}_{j_1}\cdots\widetilde{X}_{j_s}\chi_\lambda\right)(x)\right|\leqslant A|\lambda+\delta|^{s+m}.$$

由(2.73)式、(2.78)式和上式就得到

$$\begin{aligned}&\left|\Sigma' C_p(|\lambda+\delta|)d_\lambda\left(\widetilde{X}_{j_1}\cdots\widetilde{X}_{j_s}\chi_\lambda\right)(x)\right|\\&\quad\leqslant\Sigma'\left|C_p(|\lambda+\delta|)\right|d_\lambda\left|\left(\widetilde{X}_{j_1}\cdots\widetilde{X}_{j_s}\chi_\lambda\right)(x)\right|\end{aligned}$$

$$\leqslant A\Sigma'|\lambda+\delta|^{2m+s-p-\frac{1}{2}r}<+\infty,$$

只要 $p-n\geqslant s$.

所以 $J_\alpha^{(2)}(x)$的直到 $p-n$ 阶的各阶导级数均是绝对一致收敛的. 因而 $J_\alpha^{(2)}(x)$具有直到 $p-n$ 阶的连续偏导数. 这就得到在 $G\backslash\{e\}$上,

$$J_\alpha(x)=J_\alpha^{(1)}(x)+J_\alpha^{(2)}(x)$$

具有直到 $p-n$ 阶的各阶连续偏导数.

如果证明了 $J_\alpha(x)$与 p 的选取无关, 由 p 的任意性, 就得到 $J_\alpha(x)$在 $G\backslash\{e\}$上是 C^∞的.

要证明 $J_\alpha(x)$与 p 的选取无关,就需要计算 $J_\alpha(x)$的 Fourier 系数. 由 $C_p(|\delta|)$的定义,可得到

$$\int_G J_\alpha(x)\mathrm{d}x=0.$$

而当$0\neq\lambda\in\widehat{G}$时,

$$\begin{aligned}&\int_G J_\alpha(x)\overline{\chi_\lambda(x)}\mathrm{d}x\\&=\int_G J_\alpha^{(1)}(x)\overline{\chi_\lambda(x)}\mathrm{d}x+\int_G J_\alpha^{(2)}(x)\overline{\chi_\lambda(x)}\mathrm{d}x\\&=\int_G J_\alpha^{(1)}(x)\overline{\chi_\lambda(x)}\mathrm{d}x+C_p(|\lambda+\delta|)d_\lambda.\end{aligned}$$

由 G 上中心函数的积分公式可得

$$\begin{aligned}&\int_G J_\alpha^{(1)}(x)\overline{\chi_\lambda(x)}\mathrm{d}x\\&=\frac{(-\mathrm{i})^m}{(2\pi)^{\frac{1}{2}r}|W|p(\delta)}\int_Q P\left(\frac{\partial}{\partial h}\right)\{f_\alpha(|h|)\}\overline{D_{\lambda+\delta}(h)}\mathrm{d}h\\&=\frac{(-\mathrm{i})^m(-1)^m}{(2\pi)^{\frac{1}{2}r}|W|p(\delta)}\int_Q f_\alpha(|h|)P\left(\frac{\partial}{\partial h}\right)\{\overline{D_{\lambda+\delta}(h)}\}\mathrm{d}h\\&=\frac{d_\lambda}{|W|(2\pi)^{\frac{1}{2}r}}\int_Q f_\alpha(|h|)\sum_{\sigma\in W}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\sigma(\lambda+\delta),h)}\mathrm{d}h\\&=d_\lambda\frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}r}}\int_Q f_\alpha(|h|)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\lambda+\delta,h)}\mathrm{d}h\end{aligned}$$

$$= d_\lambda \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}r}} \int_{\mathfrak{h}} f_\alpha(|h|) e^{-i(\lambda+\delta,h)} dh. \qquad (2.94)$$

将(2.75)式或(2.80)式代入(2.94)式中，就得到当$0 \neq \lambda \in \widehat{G}$时，

$$\int_G J_\alpha^{(1)}(x) \overline{\chi_\lambda(x)} dx$$

$$= (|\lambda + \delta|^{-\alpha} - C_p(|\lambda + \delta|)) d_\lambda.$$

这也就是当$0 \neq \lambda \in \widehat{G}$时，

$$\int_G J_\alpha(x) \overline{\chi_\lambda(x)} dx = |\lambda + \delta|^{-\alpha} d_\lambda.$$

所以 $J_\alpha(x)$与引理2.8、引理2.9中 p 的选取无关，它的 Fourier 级数是

$$J_\alpha(x) \sim \Sigma' |\lambda + \delta|^{-\alpha} d_\lambda \chi_\lambda(x).$$

在(2.94)式的证明中，还有一点需要补充证明的就是：(2.94)式中第一个等式到第二个等式的分部积分是成立的.

设 D_1是 k 阶微分算子，D_2是 $m-k$ 阶微分算子，由引理2.7到引理2.9可得

$$|(D_1 f_\alpha)(h)| \leqslant A_1 |h|^{\mathrm{Re}\alpha - r - k} \log |h|^{-1},$$

$$\left| D_2 \{\overline{D_{\lambda+\delta}(h)}\} \right| = \left| D_2 \{\overline{\chi_\lambda(\exp h)}\, \overline{D(h)}\} \right|$$

$$\leqslant A_2' \left| D_2 \{\overline{D(h)}\} \right|$$

$$= A_2' \left| D_2 \left\{ \prod_{\alpha>0} (-2i) \sin \frac{1}{2} \alpha(h) \right\} \right|$$

$$\leqslant A_2 |h|^k.$$

从而当$0 \leqslant k \leqslant m$ 时，因为 $\mathrm{Re}\alpha > 0$，所以

$$D_1 \{f_\alpha(|h|)\} D_2 \{\overline{D(h)}\} \in \mathrm{L}(Q) \qquad (2.95)$$

在 Q 上可积.

以下令

$$D_\alpha = \left(\alpha, \frac{\partial}{\partial h} \right), \quad D = \prod_{\alpha>0} D_\alpha = P\left(\frac{\partial}{\partial h} \right),$$

$$D = D_1 D_2.$$

再令

$$D_1 = D_\beta D_3,\quad D_3\{f_\alpha(|h|)\} = F(h),$$
$$D_2\{\overline{D_{\lambda+\delta}(h)}\} = g(h).$$

则可得到

$$\int_Q D_1\{f_\alpha(|h|)\}D_2\{\overline{D_{\lambda+\delta}(h)}\}\mathrm{d}h$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{0<\varepsilon\leqslant|h|} D_1\{f_\alpha(|h|)\}D_2\{\overline{D_{\lambda+\delta}(h)}\}\mathrm{d}h.$$

考虑积分，由 $f_\alpha(|h|)$ 在 $|h|$ 处 C^∞ 和 $D_{\lambda+\delta}(h)C^\infty$ 可得

$$\int_{0<\varepsilon\leqslant|h|} D_1\{f_\alpha(|h|)\}D_2\{\overline{D_{\lambda+\delta}(h)}\}\mathrm{d}h$$
$$= \int_{|h|\geqslant\varepsilon}(D_\beta F)(h)g(h)\mathrm{d}h$$
$$= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\int_{|h|\geqslant\varepsilon}(F(h+t\beta) - F(h))g(h)\mathrm{d}h$$
$$= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left\{\int_{|h|\geqslant\varepsilon}F(h+t\beta)g(h)\mathrm{d}h - \int_{|h|\geqslant\varepsilon}F(h)g(h)\mathrm{d}h\right\}$$
$$= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left\{\int_{|h-t\beta|\geqslant\varepsilon}F(h)g(h-t\beta)\mathrm{d}h - \int_{|h|\geqslant\varepsilon}F(h)g(h)\mathrm{d}h\right\}$$
$$= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\int_{|h|\geqslant\varepsilon}F(h)(g(h-t\beta) - g(h))\mathrm{d}h$$
$$+ \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left\{\int_{|h-t\beta|\geqslant\varepsilon}F(h)g(h-t\beta)\mathrm{d}h - \int_{|h|\geqslant\varepsilon}F(h)g(h-t\beta)\mathrm{d}h\right\}$$
$$= \int_{|h|\geqslant\varepsilon} - F(h)D_\beta\{g(h)\}\mathrm{d}h$$

$$+\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}I(\varepsilon,t). \tag{2.96}$$

现在置

$$D_1(\varepsilon,t)=\{h,|h|\leqslant\varepsilon\}\backslash\{h,|h-t\beta|\leqslant\varepsilon\},$$
$$D_2(\varepsilon,t)=\{h,|h-t\beta|\leqslant\varepsilon\}\backslash\{h,|h|\leqslant\varepsilon\}.$$

则可得

$$I(\varepsilon,t)=\left(\int_{D_1(\varepsilon,t)}-\int_{D_2(\varepsilon,t)}\right)F(h)g(h-t\beta)\mathrm{d}h. \tag{2.97}$$

(2.97)式中的 $D_1(\varepsilon,t)$和 $D_2(\varepsilon,t)$是全等的图形，且它们的体积均为

$$A_r\varepsilon^{r-1}t+O(t^2).$$

其中 A_r 是仅依赖于 r 的一个正常数.

由引理2.7、2.8和2.9，即得

$$|I(\varepsilon,t)|\leqslant A\varepsilon^{r-1}t\varepsilon^{\mathrm{Re}\alpha-r-k+1}\varepsilon^k\log\frac{1}{\varepsilon}$$
$$=At\varepsilon^{\mathrm{Re}\alpha}\log\frac{1}{\varepsilon}.$$

将上面的估计代入(2.96)式，先令 $t\to 0$，再令 $\varepsilon\to 0$，就得到

$$\int_Q \boldsymbol{D}_\beta\boldsymbol{D}_3\{f_\alpha(|h|)\}\boldsymbol{D}_2\{\overline{D_{\lambda+\delta}(h)}\}\mathrm{d}h$$
$$=-\int_Q \boldsymbol{D}_3\{f_\alpha(|h|)\}\boldsymbol{D}_\beta\boldsymbol{D}_2\{\overline{D_{\lambda+\delta}(h)}\}\mathrm{d}h.$$

对 $\boldsymbol{D}_1$为 $k=m,m-1,\cdots,1$阶的微分算子 $\boldsymbol{D}=\boldsymbol{D}_1\boldsymbol{D}_2,\boldsymbol{D}_1=\boldsymbol{D}_\beta\boldsymbol{D}_3$均成立. 从而(2.94)式中的分部积分成立. 这就完成了定理2.13的证明. ▌

由定理2.13的证明中还可得到如下定理：

定理2.14　设 $J_\alpha(x)$和 $F_\alpha(x)$如同定理2.13中所定义，再令

$$J_\alpha(x)=F_\alpha(x)+B_\alpha(x),$$

则 $B_\alpha(x)$在幺元的割迹的内部是 C^∞的. 特别是 $B_\alpha(x)$在幺元附近是 C^∞的.

2.4.3　Riesz 位势的核函微

在得到 Bessel 位势的核函数以后，就很容易得出 Riesz 位势

I_α 的核函数 $I_\alpha(x)$. 实际上由第1章的命题1.20，当$0\neq\lambda\in\widehat{G}$时，

$$\mu_\lambda = |\lambda+\delta|^2 - |\delta|^2.$$

则可得

$$\begin{aligned}\mu_\lambda^{-\alpha/2} &= |\lambda+\delta|^{-\alpha}\left(1-\frac{|\delta|^2}{|\lambda+\delta|^2}\right)^{-\alpha/2} \\ &= |\lambda+\delta|^{-\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}C_k|\delta|^{2k} \\ &\quad\times|\lambda+\delta|^{-2k} \\ &= |\lambda+\delta|^{-\alpha}+\sum_{k=1}^{p}b_k|\lambda+\delta|^{-\alpha-2k} \\ &\quad+O(|\lambda+\delta|^{-\alpha-2p-2}).\end{aligned}$$

由此即可得如下定理：

定理 2.15 设 $\mathrm{Re}\alpha>0$，$I_\alpha=(-\Delta)^{-\frac{1}{2}\alpha}$是 Riesz 位势算子，则有

$$I_\alpha = J_\alpha + \sum_{k=1}^{p}b_kJ_{\alpha+2k} + R_{\alpha,p}$$

成立. 其中 $J_{\alpha+2k}$ $(k=0,1,\cdots,p)$是 Bessel 位势算子，$R_{\alpha,p}$是 G 上的至少具有$2p-n$ 阶连续偏导数的函数定义的卷积算子，相对应地，I_α 的核函数 $I_\alpha(x)$有对应的分解式：

$$I_\alpha(x) = J_\alpha(x) + \sum_{k=1}^{p}b_kJ_{\alpha+2k}(x) + R_{\alpha,p}(x),$$

其中 $J_{\alpha+2k}(x)$是 Bessel 位势算子 $J_{\alpha+2k}$的核函数$(k=0,1,\cdots,p)$，$R_{\alpha,p}(x)$在 G 上至少有$2p-n$ 阶的连续偏导数.

§2.5 紧致齐性空间上的 Riesz 位势与 Bessel 位势

设 M 是紧致齐性空间，Δ_M 是 M 上的 Laplace-Beltrami 算子，同样可定义 M 上的 Riesz 位势 I_α 和 Bessel 位势 J_α 为

$$I_\alpha = (-\Delta_M)^{-\frac{1}{2}\alpha},\quad J_\alpha = (|\delta|^2I-\Delta_M)^{-\frac{1}{2}\alpha},$$
$$\mathrm{Re}\alpha>0. \tag{2.98}$$

设 $f\in C^\infty(M)$，它的 Fourier 级数是

$$f(m) = \sum_{\lambda \in \hat{M}} d_\lambda \chi_\lambda * f(m),$$

则 I_α 和 J_α 在 $C^\infty(M)$ 上的作用是

$$(I_\alpha f)(m) = \sum_{0 \neq \lambda \in \hat{M}} \mu_\lambda^{-\frac{1}{2}\alpha} \quad d_\lambda \chi_\lambda * f,$$

$$(J_\alpha f)(m) = \sum_{0 \neq \lambda \in \hat{M}} |\lambda + \delta|^{-\alpha} d_\lambda \chi_\lambda * f.$$

从而 I_α 和 J_α 同样可看作中心广义函数 $I_\alpha(m)$ 和 $J_\alpha(m)$ 在 $C^\infty(M)$ 上产生的卷积算子：

$$I_\alpha(\cdot) * f \text{ 和 } J_\alpha(\cdot) * f.$$

实际上，$I_\alpha(m)$ 和 $J_\alpha(m)$ 都是 M 上的可积函数. 更进一步，有如下定理：

定理 2.16 紧致齐性空间 M 上的 Bessel 位势算子的核函数 $J_\alpha(m)$ 是 $M\backslash\{o\}$ 上的 C^∞ 函数. 而在 $o \in M$ 点附近，$J_\alpha(m)$ 的奇性主要部分则由以下的 $F_\alpha(m)$ 给出：

$$F_\alpha(m) = \begin{cases} C_\alpha |m|^{\alpha - s} \log |m|, \\ \qquad \text{若 } \alpha - s = 0, 2, 4, \cdots; \\ C_\alpha |m|^{\alpha - s}, \text{其他情形}. \end{cases} \tag{2.99}$$

其中 $|m|$ 表示 m 到 o 点间的 Riemann 距离，s 是 M 的实维数.

证明 仍记 G 为 M 上等度量变换群的含幺元的连通分支，$o \in M$，K 是 G 在 o 点的迷向子群，$J_\alpha(x)$ 是 G 上的 Bessel 位势算子的核函数，$m = p(m) \cdot o$，$p \in \exp\mathfrak{p}$，则令

$$J_\alpha(m) = \int_K J_\alpha(p(m)k) \mathrm{d}k, \tag{2.100}$$

就容易验证 $J_\alpha(m)$ 在 M 上可积，且它的 Fourier 级数是

$$J_\alpha(m) \sim \Sigma' |\lambda + \delta|^{-\alpha} d_\lambda \chi_\lambda * f(m).$$

其中 Σ' 表示对 $\lambda \neq 0$ 的所有 $\lambda \in \hat{M}$ 求和，δ 是 G 的李代数 $\mathfrak{g}$ 的全体正根之和的一半.

因为 $J_\alpha(x)$ 在 $G\backslash\{e\}$ 上是 C^∞ 函数，由 (2.100) 式自然有 $J_\alpha(m)$ 在 $M\backslash\{o\}$ 上是 C^∞ 的. 所以只需证明定理中 $J_\alpha(m)$ 在 o 点附近奇性的主要部分就是 (2.99) 式中的函数 $F_\alpha(m)$.

设 G 的维数为 n,K 的维数为 q. 因为 M 的维数是 s,则有 $n=s+q$. 当 $\alpha-n\neq 0,2,4,\cdots$ 时,由定理2.13,$J_\alpha(m)$ 在 o 点附近的奇性是由函数

$$|x|_a^{\alpha-n}=\begin{cases}|x|^{\alpha-n}, & 若\ |x|\leqslant a;\\ 0, & 若\ |x|>a,\end{cases}$$

产生,其中 $|x|$ 表示 G 中点 x 到幺元 e 间的 Riemann 距离. 也就是说,$F_\alpha(m)$ 是下面关于 K 的积分:

$$C_\alpha\int_K |p(m)k|_a^{\alpha-n}\mathrm{d}k \tag{2.101}$$

在 o 点附近奇性的主要部分.

按照第1章中(1.58)式的 $\mathfrak{g}$ 的正交直和分解,设

$$p(m)=\exp X, X\in P, k=\exp T,\ T\in \mathfrak{k},$$

并记

$$\exp X\exp T=\exp(X+T+Z(X,T)),$$

则存在仅依赖于 G 的正数 $B_0\leqslant 1$,使当 $|X|$、$|T|\leqslant B_0$ 时,$Z(X,T)$ 可展开成 X 和 T 的幂级数(这由乘法运算的实解析性质保证). 记

$$X_0=X/|X|,\ T_0=T/|T|.$$

就可得

$$Z(X,T)=|X|\cdot|T|\times\sum_{m,n\geqslant 0}C_{mn}(X_0,T_0)|X|^m\cdot|T|^n, \tag{2.102}$$

而且当 $|X|$、$|T|\leqslant B_0$ 时,对任意的 X_0、T_0,存在仅依赖于 G 的正数 A_0,使下式成立:

$$\sum_{m,n\geqslant 0}|C_{mn}(X_0,T_0)||X|^m|T|^n\leqslant A_0. \tag{2.103}$$

将上面的(2.101)式中的积分分成两部分:

$$\int_K|p(m)k|_a^{\alpha-n}\mathrm{d}k=\int_{|X+T|\leqslant\frac{1}{2}a}+\int_{|X+T|\geqslant\frac{1}{2}a}=I_1+I_2.$$

而为

$$|p(m)|=|X|,|k|=|T|,$$

$$|p(m)k| = |X + T + Z(X,T)|,$$

上式中对于 $Y \in \mathfrak{g}$，$(\cdot,\cdot)$是 G 上的 G 不变内积时，有

$$|Y| = (Y,Y)^{\frac{1}{2}}.$$

由(2.103)式，只要$0<a<B_0$适当小，就有

$$|X + T| \geqslant 8|Z(X,T)|，若\ |X|、|T| \leqslant a. \tag{2.104}$$

从而 I_2作为 m 的函数在$|m|<\frac{1}{4}a$ 时是 C^∞的函数. 所以 $F_s(m)$的在 o 点附近的奇性就由 I_1产生.

对每个紧致李群 G，第2章中(2.18)式中的函数 $D_0(h)$是 Weyl 群对称的，从而它唯一确定了 G 的李代数 $\mathfrak{g}$ 上的中心函数 $D_0(X)$，且 G 的 Haar 测度 $\mathrm{d}x$ 在测地法坐标系中就表示成

$$\mathrm{d}x = |D_0(X)|^2\mathrm{d}X.$$

现在为了区别 G 和 K 这两个不同的紧致李群，就将 K 对应的(2.18)式中的函数记为 $D_0(K,T)$，且有在测地法坐标系中

$$\mathrm{d}k = C_0|D_0(K,T)|^2\mathrm{d}T$$

是 K 的规格化的 Haar 测度，其中 C_0是仅依赖于 K 的正常数. 由此可将 I_1表示为

$$I_1 = \int_{|X+T|\leqslant\frac{1}{2}a} |X + T + Z(X,T)|^{s-n}|D_0(K,T)|^2\mathrm{d}T.$$

它是 $m=p(m)\cdot o=\exp X\cdot o$ 在$0<|m|<\frac{1}{2}a$ 上的函数.

由(2.18)在$|D_0(K,T)|^2$可展成级数

$$|D_0(K,T)|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(T_0)|T|^{2k},$$

它适合

$$\sum_{k=0}^{\infty}|b_k(T_0)| < A_1$$

关于 T_0绝对一致收敛.

再由

$$\begin{aligned}|X + T + Z(X,T)|^2 = & |X + T|^2 + |Z(X,T)|^2 \\ & + 2(X + T,Z(X,T))\end{aligned}$$

$$= |X+T|^2(1+B(X,T))$$
$$= (|X|^2+|T|^2)(1+B(X,T))$$

和

$$(1-t)^{\frac{1}{2}(\alpha-n)} = \sum_{k=0}^{\infty} C_k t^k$$

可得到

$$|X+T+Z(X,T)|^{\alpha-n}$$
$$= (|X|^2+|T|^2)^{\frac{1}{2}(\alpha-n)}(1+B(X,T))^{\frac{1}{2}(\alpha-n)}$$
$$= (|X|^2+|T|^2)^{\frac{1}{2}(\alpha-n)}\sum_{k=0}^{\infty} C_k B(X,T)^k,$$

其中

$$B(X,T)=\frac{|X|\cdot|T|}{|X+T|}\sum_{m,n\geqslant 0} A_{mn}(X_0,T_0)|X|^m|T|^n$$
$$+\frac{|X|^2|T|^2}{|X+T|^2}\sum_{m,n\geqslant 0} B_{mn}(X_0,T_0)|X|^m|T|^n,$$

适合 $|X|$、$|T|\leqslant a$ 时，有

$$\frac{|X|\cdot|T|}{|X+T|}\sum_{m,n\geqslant 0}|A_{mn}(X_0,T_0)|\cdot|X|^m|T|^n\leqslant\frac{1}{4},$$
$$\frac{|X|^2|T|^2}{|X+T|^2}\sum_{m,n\geqslant 0}|B_{mn}(X_0,T_0)|\cdot|X|^m|T|^n\leqslant\frac{1}{64}.$$

这说明

$$(1+B(X,T))^{\frac{1}{2}(\alpha-n)}|D_0(K,T)|^2$$
$$=1+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m,n\geqslant k} a_{k,m,n}(X_0,T_0)$$
$$\times|X+T|^{-k}|X|^m|T|^n$$

且关于 $|X|$、$|T|\leqslant a$ 时，有下式一致成立：

$$1+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m,n\geqslant k}\left|a_{k,m,n}(X_0,T_0)\right|\frac{|X|^m|T|^n}{|X+T|^k}$$
$$\leqslant A_1\sum_{k=0}^{\infty}|C_k|\left(\frac{17}{64}\right)^k<+\infty.$$

记 Σ 为 $R^q=\mathfrak{p}$ 中的单位球面，$T_0\in\Sigma$，ω_{q-1} 是 Σ 的 $q-1$ 维体积，

$$a_{k,m,n}(X_0)=\int_{\Sigma}a_{k,m,n}(X_0,T_0)\mathrm{d}T_0,$$

就得到

$$\begin{aligned}I_1=&\int_{|X+T|\leqslant\frac{1}{2}a}(|X|^2+|T|^2)^{\frac{1}{2}(\alpha-n)}\mathrm{d}T\\&+\sum_{k=1}\sum_{m,p\geqslant k}\frac{a_{k,m,p}(X_0)}{\omega_{q-1}}\\&\times\int_{|X+T|\leqslant\frac{1}{2}a}(|X|^2+|T|^2)^{\frac{1}{2}(\alpha-h-k)}|X|^m|T|^p\mathrm{d}T\\=&I_{10}+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m,p\geqslant k}a_{k,m,p}(X_0)\\&\times J_{k,m,p}.\end{aligned}\tag{2.105}$$

先计算上式中的 I_{10}，记

$$(1-t)^{\frac{1}{2}q-1}=\sum_{k=0}^{\infty}a_kt^k,$$

则因为 $q>0$，就有

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|a_k|}{1+k}<+\infty.$$

再记 $A=\left(\frac{1}{4}a^2-|X|^2\right)^{\frac{1}{2}}$，并记

$$\begin{aligned}u^{\frac{1}{2}q-1}&=(|X|^2+u)^{\frac{1}{2}q-1}\left(1-\frac{|X|^2}{|X|^2+u}\right)^{\frac{1}{2}q-1}\\&=\sum_{k=0}^{\infty}a_k|X|^{2k}(|X|^2+u)^{\frac{1}{2}q-1-k},\end{aligned}$$

这就得到

$$\begin{aligned}I_{10}&=\int_{|X+T|\leqslant\frac{1}{2}a}(|X|^2+|T|^2)^{\frac{1}{2}(\alpha-n)}\mathrm{d}T\\&=\omega_{q-1}\int_0^A(|X|^2+u^2)^{\frac{1}{2}(\alpha-n)}u^{q-1}\mathrm{d}u\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2}\omega_{q-1}\int_0^{A^2}(|X|^2+u)^{\frac{1}{2}(\alpha-s)}u^{\frac{1}{2}q-1}\mathrm{d}u$$

$$= \frac{1}{2}\omega_{q-1}\sum_{k=0}^{\infty}a_k|X|^{2k}$$

$$\times\int_0^{A^2}(|X|^2+u)^{\frac{1}{2}(\alpha-s-2k-2)}\mathrm{d}u. \qquad (2.106)$$

当 $\alpha-s\neq 0,2,4,\cdots$，即 $\alpha-s-2k\neq 0$时，对 $k=0,1,2,\cdots$均成立，从而得到

$$I_{10}=\omega_{q-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k}{\alpha-s-2k}\left\{\left(\frac{a}{2}\right)^{\alpha-s-2k}|X|^{2k}-|X|^{\alpha-s}\right\}$$

$$=\omega_{q-1}\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k}{\alpha-s-2k}\left(\frac{a}{2}\right)^{\alpha-s}\left(\frac{2|X|}{a}\right)^{2k}\right.$$

$$\left.-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k}{\alpha-s-2k}|X|^{\alpha-s}\right\}.$$

由 a_k 的定义可知

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left|\frac{a_k}{\alpha-s-2k}\right|<+\infty,$$

因此就有

$$I_{10}=F(X)+A_\alpha|X|^{\alpha-s}, \qquad (2.106')$$

其中 $A_\alpha\neq 0$，$F(X)$在$|X|<A$ 上是 C^∞的.

而当 $\alpha-s=0,2,4,\cdots$，即 $\alpha-s=2N_0$，$N_0=0,1,2,\cdots$时，(2.105)式的积分变成

$$I_{10}=\omega_{q-1}\sum_{k\neq N_0}\frac{a_k}{\alpha-s-2k}$$

$$\times\left\{\left(\frac{a}{2}\right)^{\alpha-s}\left(\frac{2|X|}{a}\right)^{2k}-|X|^{\alpha-s}\right\}$$

$$+\omega_{q-1}a_{N_0}\left\{\log\left(\frac{a}{2}\right)^2\left(\frac{2|X|}{a}\right)^{2N_0}\right.$$

$$\left.-|X|^{\alpha-s}\log|X|^2\right\}$$

$$= F(X) + A_\alpha |X|^{\alpha-s}\log|X|, \tag{2.107}$$

其中 $F(X)$在$|X|<\frac{1}{2}a$ 上仍是C^∞的，$A_\alpha\neq 0$.

用以上方法计算 $J_{k,m,p}$，可得到当 $\alpha-s\neq$整数时，

$$J_{k,m,p}= F(X) + \sum_{t=0}^{\infty} \frac{-a_k}{\alpha-s-k+p-2t}|X|^{\alpha-s+m+p-k}$$
$$= |X|^m F(X) + b_{k,p}|X|^{\alpha-s+m+p-k}, \tag{2.108}$$

其中 $F(X)$在$|X|<\frac{1}{2}a$ 上是C^∞的.

而当 $\alpha-s=$整数时，必有 p、k 和 N_0，使得

$$\alpha - s + p - k - 2N_0 = 0.$$

其中 N_0为非负整数，这时，若 $\alpha-s+p-k\neq 0,2,4,\cdots$，则有

$$J_{k,m,p} = |X|^m\{F(X) + b_{k,p}|X|^{\alpha-s+p-k}\}, \tag{2.109}$$

而若 $\alpha-s+p-k=0,2,4,\cdots$，则有

$$J_{k,m,p} = |X|^m\{F(X) + b_{k,p}|X|^{\alpha-s+p-k}\log|X|\}. \tag{2.110}$$

其中 $F(X)$在$|X|\leqslant\frac{1}{2}a$ 上 C^∞，$b_{k,p}\neq 0$. 又因为 $m,p\geqslant k\geqslant 1$，所以(2.108)、(2.109)和(2.110)式中的函数在 $X=0$点的奇性阶低于(2.106)或(2.107)式中的任意一个.

这样在 $\alpha-n\neq 0,2,4,\cdots$时，由上面的证明以及

$$|m| = |p(m)\cdot o| = |p(m)| = |\exp X| = |X|.$$

就证明了定理的(2.99)式.

当 $\alpha-n=0,2,4,\cdots$时，由定理2.13知，$J_\alpha(x)$奇性的主要部分由(2.82)式的函数 $B_\alpha(|h|)$产生，即由

$$b_\alpha D_0(Y)\left(\left(\frac{\mathrm{d}}{t\mathrm{d}t}\right)^m B_\alpha\right)(|Y|),$$
$$Y\in\mathfrak{g},\ |Y|<a,\ x=\exp Y\in G$$

在 G 的幺元附近产生，其中

$$B_\alpha(|Y|) = \frac{1}{2^{b-1}\Gamma(b)}\int_0^{a^2-|Y|^2}(|Y|^2+u)^{-1}u^{b-1}\mathrm{d}u,$$

b 为正整数，$\alpha-r-2b=-2$，$\alpha-n=2b-2m-2$.

易见

$$\left(\left(\frac{\mathrm{d}}{t\mathrm{d}t}\right)^m B_\alpha\right)(|Y|)$$
$$=\frac{(-2)^m m!}{2^{b-1}\Gamma(b)}\int_0^{a^2-|Y|^2}(|Y|^2+u)^{-1-m}u^{b-1}\mathrm{d}u$$
$$+\left(1-\frac{|Y|^2}{a^2}\right)\text{的 } b-1 \text{ 次多项式}.$$

同前面的讨论一样，记 $Y=X+T\in\mathfrak{g}$，$z\in\mathrm{R}^{2b}$，并将 $(0,z)\in\mathfrak{g}\oplus\mathrm{R}^{2b}$ 简记为 $z\in\mathfrak{g}\oplus\mathrm{R}^{2b}$，即 z 与 $\mathfrak{g}$ 正交，从而上式变成

$$\left(\left(\frac{\mathrm{d}}{t\mathrm{d}t}\right)^m B_\alpha\right)(|Y|)$$
$$=\frac{(-2)^m m!}{2^b\Gamma(b)}\int_{|Y+z|\leqslant a}(|Y|^2+|z|^2)^{-1-m}\mathrm{d}z\cdot\frac{1}{\omega_{2b-1}}.$$

取 $x=p(m)k=\exp Y$，则 $|x|=|Y|$. 将(2.101)式中的被积函数用上式函数乘以 $D_0(Y)$ 后代入，则它在 o 点的奇性就由上式产生. 再将上式代入(2.101)式后，积分分成 I_1 和 I_2，同样可得 I_2 是 $|X|<\frac{1}{2}a$ 上的 C^∞ 函数，而 I_1 的奇性只要考虑以下的积分：

$$I_{10}=\int_{|X+T+z|\leqslant\frac{1}{2}a}(|Y|^2+|T|^2+|z|^2)^{-1-m}\mathrm{d}T\mathrm{d}z.$$

现取 $u^2=|T|^2+|z|^2$，$A=\left(\frac{1}{4}a^2-|X|^2\right)^{\frac{1}{2}}$，

则可得

$$I_{10}=\omega_{q+2b-1}\int_0^A(|X|^2+u^2)^{-1-m}u^{q+2b-1}\mathrm{d}u$$
$$=\frac{1}{2}\omega_{q+2b-1}\int_0^{A^2}(|X|^2+u)^{-1-m}u^{\frac{1}{2}q+b-1}\mathrm{d}u.$$

因为 $-m-1=\frac{1}{2}(\alpha-n-b)$，同前面一样，可令

$$u^{\frac{1}{2}q+b-1}=\sum_{k=0}^{\infty}a_k|x|^{2k}(|x|+u)^{\frac{1}{2}q+b-1-k},$$

则 I_{10} 变成

$$I_{10}=\frac{1}{2}\omega_{q+2b-1}\sum_{k=0}^{\infty}a_k|X|^{2k}$$
$$\times\int_0^{A^2}(|X|^2+u)^{\frac{1}{2}(\alpha-s-2k-2)}\mathrm{d}u.$$

由上式可见，当 $\alpha-s\neq0,2,4,\cdots$ 时，$\alpha-s-2k\neq0$ 对 $k=0,1,2,\cdots$ 均成立，从而积分后的值与(2.106)式相同；当 $\alpha-s=0,2,4,\cdots$ 时，无论 q 为偶数(这时只有有限个 $a_k\neq0$)或者 q 为奇数，使 $\alpha-s-2k_0=0$ 的系数 a_{k_0} 必不为零，从而积分后的值与(2.107)式相同．这就完成了定理的证明． ▌

同定理2.15一样，紧致齐性空间上的 Riesz 位势算子及其核函数有以下渐近展开：

定理 2.17 紧致齐性空间上的 Riesz 位势算子 I_α 具有如下的渐近展开：

$$I_\alpha=J_\alpha+\sum_{k=1}^{p-1}b_kJ_{\alpha+2k}+R_p.$$

相对应地，I_α 的核函数 $I_\alpha(m)$ 有如下的渐近展开：

$$I_\alpha(m)=J_\alpha(m)+\sum_{k=1}^{p-1}b_kJ_{\alpha+2k}(m)+R_p(m).$$

其中 $J_{\alpha+2k}(m)$ 由定理2.16给出 $R_p(m)$ 具有直到 $p-s$ 的各阶连续偏导数，$s=\dim M$，$b_k=c_k|\delta|^{2k}$，c_k 是 $(1-t)^{-\frac{1}{2}s}$ 的在 $t=0$ 点展开为 t 的幂级数时 t^k 的系数．

§2.6 Riesz 变换与奇异积分

取紧致李群 G 的李代数的一组标准正交基 $X_1,\cdots,X_n$，并记 $\widetilde{X}_1,\cdots,\widetilde{X}_n$ 为它们对应的 G 上的左不变向量场．则 G 的 Laplace-Beltrami 算子 Δ 就是

$$\Delta=\sum_{k=1}^{n}\widetilde{X}_k^2,$$

而 G 上的 Riesz 变换 R_j 则定义为

$$R_j = \tilde{X}_j(-\Delta)^{-\frac{1}{2}},\ j = 1,2,\cdots,n. \tag{2.111}$$

将上述定义与欧氏空间上的 Riesz 变换作比较；从欧氏空间上的 Fourier 变换来看，不难发现(2.111)式的定义正是欧氏空间上的 Riesz 变换的自然推广，这一定义大概是 Stein. E. M 首先提出的.

紧致李群 G 上由(2.111)式定义的 Riesz 变换不仅是一个奇异积分算子，它还具有一个重要的性质如下：

记 $\mathrm{Ker}(\Delta)$ 为 G 上适合 $\Delta f=0$ 的函数 f 的全体构成的空间，则对紧致李群 G 来说，$\mathrm{Ker}(\Delta)$ 就是 G 上的常值函数空间. 再记 $S'(G)/\mathrm{Ker}(\Delta)$ 为 $C^\infty(G)$ 上的广义函数空间模 $\mathrm{Ker}(\Delta)$ 所得的商空间，则对 $f\in S'(G)/\mathrm{Ker}(\Delta)$，有下式成立：

$$-(R_1^2 + \cdots + R_n^2)f = f. \tag{2.112}$$

对紧致齐性空间 M，Riesz 变换就变得稍微复杂一些，设 $S=\dim M$，则当 M 不是紧致李群时，一般地说，无论怎样定义 Riesz变换 $R_j\,(j=1,2,\cdots,s)$，$-(R_1^2+\cdots+R_s^2)$ 都不是空间 $S'(M)/\mathrm{Ker}(\Delta)$ 上的恒等算子. 其原因在于：当 M 不是紧致李群时，在 o 点割迹的内部 M_0 上，不存在这样一组基向量场 $\tilde{X}_1,\cdots,\tilde{X}_s$，使得

$$\Delta = \tilde{X}_1^2 + \cdots + \tilde{X}_s^2.$$

2.6.1 紧致李群上的 Riesz 变换

考虑由(2.111)式定义的 Riesz 变换对 $C^\infty(G)$ 中函数的作用.

设 $f\in C^\infty(G)$，它的 Fourier 级数是

$$f(x) = \sum_{\lambda\in\hat{G}} d_\lambda \mathrm{Tr}(\hat{f}_\lambda \rho_\lambda(x)),$$

则由 R_j 的定义和 Riesz 位势算子的定义可得

$$(R_jf)(x) = \sum_{0\neq\lambda\in\hat{G}} d_\lambda \mu_\lambda^{-\frac{1}{2}} \mathrm{Tr}(\mathrm{d}\rho_\lambda(X_j)\,\hat{f}_\lambda\rho_\lambda(x)). \tag{2.113}$$

由(2.113)式可见，R_jf 是广义函数

$$K_j(x) \xlongequal{S'} \sum_{0\neq\lambda\in\hat{G}} d_\lambda \mu_\lambda^{-\frac{1}{2}} \mathrm{Tr}(\mathrm{d}\rho_\lambda(X_j)\rho_\lambda(x))$$

与 f 的卷积，即

$$(R_jf)(x) \xlongequal{S'} K_j(\cdot) * f(x),\ \ j = 1,2,\cdots,n.$$

另一方面，由 $I_1(x)$的 Fourier 级数是

$$I_1(x) \sim \sum_{0\neq\lambda\in\hat{G}} \mu_\lambda^{-\frac{1}{2}} d_\lambda \chi_\lambda(x),$$

将可积函数 $I_1(x)$看作广义函数，则易见 $K_j(x)$是 $I_1(x)$在广义函数意义下的导数，即

$$K_j(x) \xlongequal{S'} (\tilde{X}_j I_1(\cdot))(x).$$

但是 $I_1(x)$在 $G\backslash\{e\}$上是 C^∞的，从而

$$K_j(x) = (\tilde{X}_j(I_1(\cdot)))(x),\ \ j = 1,2,\cdots,n \tag{2.114}$$

在 $G\backslash\{e\}$上是有定义的，且它在 $G\backslash\{e\}$上也是 C^∞的函数，且有如下定理：

定理 2.18　设 R_j　$(j=1,2,\cdots,n)$是(2.111)式定义的 Riesz 变换，$K_j(x)$　$(j=1,2,\cdots,n)$是(2.114)式定义的 G 上函数，则 Riesz变换 R_j　$(j=1,2,\cdots,n)$是奇异积分算子，它的核函数就是 $K_j(x)$，特别是当 $f\in C^\infty(G)$时，有

$$(R_jf)(x) = \mathrm{P.V.}K_j(\cdot) * f(x),\ \ j = 1,2,\cdots,n$$

成立.

证明　记 $K_{j,\varepsilon}(x)$和 $I_{1,\varepsilon}(x)$分别是 $K_j(x)$和 $I_1(x)$与 G 上的集合$\{x\in G, |x|>\varepsilon\}$的特征函数的乘积，由主值积分的定义，就有

$$\mathrm{P.V.}K_j(\cdot) * f(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} K_{j,\varepsilon}(\cdot) * f(x).$$

根据(1.109)式的卷积的定义，有

$$\begin{aligned} &K_{j,\varepsilon}(\cdot) * f(x) \\ &= \int_G K_{j,\varepsilon}(y) f(xy^{-1})\mathrm{d}y \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\int_{|y|>\varepsilon} (I_1(y\exp tX_j) - I_1(y)) f(xy^{-1})\mathrm{d}y \end{aligned}$$

$$= J_{1,\varepsilon} + J_{2,\varepsilon},$$

其中

$$J_{1,\varepsilon} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\int_G I_{1,\varepsilon}(y)\{f(x\exp tX_j y^{-1}) - f(xy^{-1})\}\mathrm{d}y,$$

$$J_{2,\varepsilon} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left\{\int_{D_1(t,\varepsilon)} - \int_{D_2(t,\varepsilon)}\right\} \times I_1(y) f(x\exp tX_j y^{-1})\mathrm{d}y$$

而在 $J_{2,\varepsilon}$中的积分区域则是

$$D_1(t,\varepsilon) = \{x \in G, |x| \leqslant \varepsilon\} \backslash \{x \in G, |\exp(-tX_j)x| \leqslant \varepsilon\},$$

$$D_2(t,\varepsilon) = \{x \in G, |\exp(-tX_j)x| \leqslant \varepsilon\} \backslash \{x \in G, |x| \leqslant \varepsilon\},$$

其中，$|x|$表示 x 与幺元 e 间的 Riemann 距离.

在测地法坐标系中具体计算 $D_1(t,\varepsilon)$和 $D_2(t,\varepsilon)$的 Haar 测度，可得

$$\mathrm{mes}\{D_1(t,\varepsilon)\} = A_n\varepsilon^{n-1}t(1 + B_1(t,\varepsilon)\varepsilon + C_1(t,\varepsilon)t)$$

及得

$$\mathrm{mes}\{D_2(t,\varepsilon)\} = A_n\varepsilon^{n-1}t(1 + B_2(t,\varepsilon)\varepsilon + C_2(t,\varepsilon)t),$$

其中 A_n 仅依赖于 G，$B_1(t,\varepsilon)$和 $B_2(t,\varepsilon)$关于 t 和 ε 一致有界，$C_1(t,\varepsilon)$和 $C_2(t,\varepsilon)$对取定的 ε 关于 t 一致有界，且在下面计算中将它们简记为 B_1、B_2和 C_1、C_2.

再简记

$$g(y) = I_1(y) f(x\exp tX_j y^{-1}),$$

并对 $J_{2,\varepsilon}$用积分的中值定理，就得到

$$\begin{aligned} J_{2,\varepsilon} = {} & \lim_{t\to 0} A_n\varepsilon^{n-1}(g(y_1) - g(y_2)) \\ & + \lim_{t\to 0} A_n\varepsilon^{n}(g(y_1)B_1 - g(y_2)B_2) \\ & + \lim_{t\to 0} A_n\varepsilon^{n-1}t(g(y_1)C_1 - g(y_2)C_2), \end{aligned}$$

其中 $y_1 \in D_1(t,\varepsilon)$，$y_2 \in D_2(t,\varepsilon)$.

由定理2.15和 f 的 C^∞性质易得：当 $y \in D_j(t,\varepsilon)$，$j=1,2$时，存在仅依赖于 G 的正数 A_0，使得

$$|g(y)|\leqslant A_0\|f\|_\infty\varepsilon^{1-n},$$

只要$0<t<\frac{1}{2}\varepsilon$. 而由定理2.15又可得

$$I_1(x)=f_p(|x|)+R_p(x),$$

当 p 取得足够大时，$f_p(|x|)$在 $G\backslash\{e\}$上至少有 $p-n$ 阶连续偏导数；$R_p(x)$在 G 上至少有 $p-n$ 阶连续偏导数，从而可得

$$\begin{aligned}|g(y_1)-g(y_2)|\leqslant&|f_p(|y_1|)-f_p(|y_2|)|\cdot\|f\|_\infty\\&+A_0\varepsilon^{1-n}\cdot\varepsilon(\|R_p\|_{1,\infty}+\|f\|_{1,\infty}),\end{aligned}$$

其中第一项在 $t\to0$时趋于零，$\|\cdot\|_{1,\infty}$表示函数的所有一阶偏导数的 L^∞范数之和.

于是得到

$$\lim_{t\to0}J_{2,\varepsilon}=0,$$

所以有

$$\begin{aligned}&\text{P. V. }K_j(\cdot)*f(x)\\&=\lim_{t\to0}\frac{1}{t}\int_G I_1(y)\{f(x\exp tX_jy^{-1})-f(xy^{-1})\}\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

用上式计算 P. V. $K(\cdot)*f(x)$的 Fourier 系数，可得

$$\begin{aligned}&\int_G\text{P. V. }K_j(\cdot)*f(x)\rho_\lambda(x)^{-1}\mathrm{d}x\\&=\lim_{t\to0}\frac{1}{t}\int_G\int_G I_1(y)\{f(x\exp tX_jy^{-1})\\&\quad-f(xy^{-1})\}\rho_\lambda(x^{-1})\mathrm{d}y\mathrm{d}x\\&=\lim_{t\to0}\frac{1}{t}\int_G\int_G I_1(y)f(x)\rho_\lambda(y^{-1})\\&\quad\times(\rho_\lambda(\exp tX_j)-I)\rho_\lambda(x^{-1})\mathrm{d}y\mathrm{d}x\\&=\begin{cases}0,\ 若\ \lambda=0;\\\mu_\lambda^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}\rho_\lambda(X_j)\ \hat{f}_\lambda,\ 若\ 0\neq\lambda\in\hat{G}.\end{cases}\end{aligned}$$

因此，当 $f\in C^\infty(G)$时，P. V. $K_j(\cdot)*f$ 的 Fourier 级数就是(2.113)式. 于是定理得证.　▌

定理 2.19　在测地法坐标系中，Riesz 变换 R_j 的核函数 $K_j(x)$在 $G\backslash\{e\}$上是 C^∞函数，且 $K_j(x)$又可表示成

$$K_j(x) = C_1 x_j |x|^{-1-n} + r_j(x),\ j = 1,2,\cdots,n,$$

其中 $r_j(x)$ 在 G 上可积，C_1 是仅依赖于 G 的常数，$|x|$ 是 G 中的点 x 与 e 点间的 Riemann 距离.

证明 在 $\mathfrak{g}$ 的标准正交基 $X_1,\cdots,X_n$ 之下，每个 $X\in\mathfrak{g}$ 有唯一的坐标表示

$$X = x_1X_1 + x_2X_2 + \cdots + x_nX_n. \tag{2.115}$$

设 G_e 是 G 关于幺元 e 的割迹内部，Ω_0 是 G 关于 e 的切割迹内部，则当 $x=\exp X\in G_e$，即 $X\in\Omega_0$ 时，就有

$$|x| = |X| = (x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{\frac{1}{2}}.$$

对 $X\in\Omega_0$、$x=\exp X$，记

$$\left(\frac{I - e^{-\mathrm{ad}X}}{\mathrm{ad}X}\right)^{-1} = (a_{ij}(x))_{1\leqslant i,j\leqslant n}. \tag{2.116}$$

则上式左端在包含 $|x|\leqslant a$ 的一个开集上为实解析的，由第1章的 §1.3节可得

$$\tilde{X}_j = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}(x)\frac{\partial}{\partial x_k},\ j = 1,2,\cdots,n. \tag{2.117}$$

由定理2.13和定理2.15，当 $n\neq 1$ 时就有

$$I_1(x) = C_1'|x|_a^{1-n} + R(x),$$

其中 $(\tilde{X}_jR)(x)$ $(j=1,2,\cdots,n)$ 在 G 上仍然可积，而函数 $|x|_a$ 定义为若 $|x|\geqslant a$，则它的值为零；若 $|x|<a$，则它的值为 $|x|$. 由此可得

$$\begin{aligned}
&(\tilde{X}_jI_1(\cdot))(x)\\
&= C_1'\sum_{k=1}^{n} a_{kj}\frac{\partial}{\partial x_k}(|x|_a^{1-n}) + (\tilde{X}_jR)(x)\\
&= C_1'(1-n)\sum_{k=1}^{n} a_{kj}(x)x_k|x|_a^{-n-1} + (\tilde{X}_jR)(x)\\
&= C_1x_j|x|^{-1-n} + r_j(x).
\end{aligned}$$

在上式中用到若设

$$(b_{ij}(x)) = (a_{ij}(x)) - I, \tag{2.118}$$

则存在仅依赖于 G 和 a 的正数 A_0，使得当 $|x|\leqslant a$ 且 $i\neq j$ 时，

$|b_{ji}(x)|\leqslant A_0|x|$. 于是定理得证. ▌

2.6.2 紧致李群上的奇异积分

由上一小节关于 Riesz 变换的讨论,可以看出能将它推广为紧致李群上更一般的奇异积分.

设 G 的李代数 $\mathfrak{g}$ 在(2.115)式的坐标系下,作为一个 n 维的欧氏空间,$\mathfrak{g}$ 上的 k 次齐次调和多项式所成的空间为 A_k. 对多项式

$$P_k(x_1,\cdots,x_n)\in A_k$$

定义相应的左不变向量场的多项式 $P_k(\tilde{X})$ 为

$$P_k(\tilde{X})\equiv P_k(\tilde{X}_1,\cdots,\tilde{X}_n),\tag{2.119}$$

而 $P_k(\tilde{X})$ 在不可约酉表示 ρ_λ 之下的表示多项式是

$$P_k(\mathrm{d}\rho_\lambda(X))\equiv P_k(\mathrm{d}\rho_\lambda(X_1),\cdots,\mathrm{d}\rho_\lambda(X_n)).\tag{2.120}$$

再令奇异积分算子 T_k 为

$$T_k=P_k(\tilde{X})(-\Delta)^{-\frac{1}{2}k},\tag{2.121}$$

则有

定理 2.20　设 $T_k,k=1,2,\cdots$,由(2.121)式定义,$I_k(x)$ 是 Riesz 位势算子 I_k 的核函数,则 T_k 的核函数是

$$K_k(x)=(P_k(\tilde{X})I_k(\cdot))(x),$$

它适合:

(1) 若 $f\in C^\infty(G)$,则

$$(T_kf)(x)=\mathrm{P.V.}\,K_k(\cdot)*f(x);$$

(2) $K_k(x)$ 可表示成

$$K_k(x)=C_kP_k(x_1,\cdots,x_n)|x|^{-n-k}+R_k(x),$$

其中 $R_k(x)$ 在 G 上可积,C_k 仅依赖于 G 和 k;

(3) 一般地,设 $a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$ 满足适当条件,令

$$T=\sum_{k=1}^{\infty}a_kT_k,$$

则 T 的核函数 $K(x)$ 为

$$K(x)=\Omega(X/|X|)|X|^{-n}+r(x),$$

其中 $r(x)$ 在 G 上可积，$x=\exp X$，$X\in\Omega_0$，而且 $\Omega(X/|X|)$ 展开为 $\mathfrak{g}$ 的单位球面上的 Fourier 级数为

$$\Omega(X/|X|)\sim\sum_{k=1}^{\infty}a_kC_kP_k(x_1,\cdots,x_n)|X|^{-k}.$$

证明　当 G 的维数 $n\geqslant 2$ 时，容易验证

$$(a_1x_1+\cdots+a_nx_n)^k$$

对 $a_1,\cdots,a_n$ 在复域 C 中独立变化时，必可张成 $x_1,\cdots,x_n$ 的 k 次齐次多项式全体所成的复线性空间，且容易验证 $(a_1x_1+\cdots+a_nx_n)^k$ 是调和多项式在 $k\geqslant 2$ 时的充要条件是

$$a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2=0,$$

从而当 $k\geqslant 2$ 时

$$A_k=\operatorname{span}\{(a_1x_1+\cdots+a_nx_n)^k,a_1^2+\cdots+a_n^2=0\}.$$

因此，只须对形如

$$P_k(\tilde{X})=(a_1x_1+\cdots+a_nx_n)^k,$$
$$a_1^2+\cdots+a_n^2=0$$

的 $P_k\in A_k$ 来证明定理.

在法坐标系中，由(2.117)和(2.118)式可得

$$P_k(\tilde{X})=P_k\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)+Q_k\left(\frac{\partial}{\partial x}\right),$$

其中

$$P_k\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)=\left(a_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\cdots+a_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^k,\tag{2.122}$$

$$Q_k\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)=\sum_{|m|=k}b_m(x)\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^m+\text{低阶导数}.\tag{2.123}$$

其中 $m=(m_1,\cdots,m_n)$，m_k 为非负整数，$k=1,\cdots,n$，$|m|=m_1+\cdots+m_n$. 且当 $|x|\leqslant a$ 时，存在仅依赖于 G 和 a 的正数 A_0，使得

$$|b_m(x)|\leqslant A_0|x|.$$

由定理2.13和2.15，可得：当 $k-n\neq 0,2,\cdots$ 时，

$$I_k(x)=C_k'|x|_a^{k-n}+r_k(x),$$

适合 $(P_k(\tilde{X})r_k)(x)$ 在 G 上可积，从而有

$$\begin{aligned}
&(P_k(\tilde{X})I_k(\cdot))(x) \\
&\quad = \left(P_k\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) + Q_k\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\right)(C_k'|x|_a^{k-n}) \\
&\quad\quad + (P_k(\tilde{X})r_k)(x).
\end{aligned} \tag{2.124}$$

由(2.123)式，(2.124)式中的项 $Q_k\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\{C_k'|x|_a^{k-n}\}$ 在 G 上可积，$(P_k(\tilde{X})r_k)(x)$ 在 G 上也可积，因此可取

$$\begin{aligned}
R_k(x) = {} & (P_k(\tilde{X})r_k)(x) \\
& + Q_k\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\{C_k'|x|_a^{k-n}\} \\
& + C_k P_k(x_1,\cdots,x_n)(|x|^{-n-k} - |x|_a^{-n-k}),
\end{aligned}$$

它在 G 上可积.

其次可得

$$\begin{aligned}
& P_k\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)(C_k'|x|_a^{k-n}) \\
& \quad = C_k'(k-n)(k-2-n)\cdots(2-k-n) \\
& \quad\quad \times P_k(x_1,\cdots,x_n)|x|_a^{-k-n}.
\end{aligned}$$

实际上，有更一般的结果如下：

引理 2.10　设 $P_k(x_1,\cdots,x_n)\in A_k$，$X\in\mathfrak{g}$，$f(|x|)$是 $\mathfrak{g}$ 上可微的径向函数，则有

$$\begin{aligned}
& \left(P_k\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)f\right)(X) \\
& \quad = P_k(x_1,\cdots,x_n)\left(\left(\frac{\mathrm{d}}{t\mathrm{d}t}\right)^k f\right)(|x|)
\end{aligned} \tag{2.125}$$

对 $k=1,2,\cdots$ 均成立.

证明　只需对形如

$$P_k\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) = \left(a_1\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + a_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^k,$$

$$a_1^2 + \cdots + a_n^2 = 0,$$

且 $k\geqslant 2$的情形证明. 由引理2.7可得

$$\left(\left(a_1\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + a_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)f\right)(X)$$

$$= (a_1x_1 + \cdots + a_nx_n)\left(\frac{\mathrm{d}}{t\mathrm{d}t}f\right)(|X|),$$

再用$\left(a_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\cdots+a_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)$对上式等号右端求导，易见它等于

$$\sum_{k=1}^{n}\left[a_k^2\left(\frac{\mathrm{d}}{t\mathrm{d}t}f\right)(|X|) + (a_1x_1 + \cdots + a_nx_n)a_kx_k\left(\left(\frac{\mathrm{d}}{t\mathrm{d}t}\right)^2 f\right)(|X|)\right]$$

$$= (a_1x_1 + \cdots + a_nx_n)^2\left(\left(\frac{\mathrm{d}}{t\mathrm{d}t}\right)^2 f\right)(|X|).$$

由以上结果用归纳法就证明了引理. 于是证明了定理中的(2).

对于定理中的(1)，若$|x|\leqslant\varepsilon$，设$I_{k,\varepsilon}(x)$的值为零；若$|x|>\varepsilon$，$I_{k,\varepsilon}(x)$的值为$I_k(x)$，则

$$K_{k,\varepsilon}(x) = (P_k(\widetilde{X})I_{k,\varepsilon}(\cdot))(x)$$

在$|x|\leqslant\varepsilon$的值也为零；在$|x|>\varepsilon$时的值为$K_k(x)$. 因为$K_{k,\varepsilon}(x)$的Fourier 系数可由分部积分直接计算等于

$$(K_{k,\varepsilon})_\lambda^\wedge = (I_{k,\varepsilon})_\lambda^\wedge P_k(\mathrm{d}\rho_\lambda(x)).$$

从而可得：对于$f\in C^\infty(G)$，有

$$K_{k,\varepsilon}(\cdot) * f(x) = I_{k,\varepsilon} * (P_k(\widetilde{X})f)(x).$$

由于

$$\mathrm{P.V.}\,K_k(\cdot) * f(x) = \lim_{\varepsilon\to 0}K_{k,\varepsilon}(\cdot) * f(x),$$

于是得到

$$\mathrm{P.V.}\,K_k(\cdot) * f(x) = \sum_{0\neq\lambda\in\hat{G}} \mu_\lambda^{-\frac{1}{2}k} d_\lambda \mathrm{Tr}(P_k(\mathrm{d}\rho_\lambda(x))\,\hat{f}_\lambda\rho_\lambda(x)). \qquad (2.126)$$

从而证明了(1). 定理中的(3)是显然的. 于是定理得证. ▌

2.6.3 紧致齐性空间上的 Riesz 变换与奇异积分

对紧致齐性空间M，设M、o、G、K，$\mathfrak{g}=\mathfrak{k}\oplus\mathfrak{p}$. $\mathfrak{p}=T_o(M)$，$m=p(m)\cdot o$，及$\mathfrak{p}$上内积$(\cdot,\cdot)$均与第1章§1.3中的相同，再设M_o是M关于o点的割迹的内部；$\Omega_0\subset\mathfrak{p}$是$M$关于$o$点的切割迹的内部. 则显然有$X\in\Omega_0\to\exp X\cdot o\in M_o$给出$\Omega_0$到$M_o$上的微分同胚.

当 M 不是紧致李群，即 $\mathfrak{p}$ 不是 $\mathfrak{g}$ 的子李代数时，Riesz 变换就变得较为复杂了. 以下首先考察 M 上的向量场.

对 $X\in\mathfrak{p}$，通过 M 上的等度量变换群，X 可在 M 上定义两个自然的向量场 $\tilde{X}$ 和 $\tilde{X}^*$：

$$(\tilde{X}f)(m)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(p(m)\exp tX\cdot o)\bigg|_{t=0},\qquad(2.127)$$

$$(\tilde{X}^*f)(m)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(\exp tX\cdot m)\bigg|_{t=0}.\qquad(2.128)$$

$\tilde{X}$ 在 M_o 上是 C^∞ 的向量场，但在 M 上 $\tilde{X}$ 甚至不是连续的向量场，例如当 M 是偶数维的球面时，就是这样. $\tilde{X}^*$ 是 M 上的 C^∞ 向量场，但是若取 $Y\in\mathfrak{k}$，则 $\tilde{Y}^*$ 也是 M 上的 C^∞ 向量场.

取 $\mathfrak{p}$ 的一组标准正交基 $X_1,\cdots,X_s$，则仿照(2.111)式，就可定义以下两组算子：

$$\tilde{R}_j=\tilde{X}_j(-\Delta)^{-\frac{1}{2}},\ j=1,2,\cdots,s$$

和

$$R_j^*=\tilde{X}_j^*(-\Delta)^{-\frac{1}{2}},\ j=1,2,\cdots,s.$$

还可定义一组乘子算子：

$$R_j=\{0,\text{若 }\lambda=0;\mu_\lambda^{-\frac{1}{2}}I_\lambda\mathrm{d}\rho_\lambda(X_j),$$
$$0\neq\lambda\in\hat{M}\},\ j=1,\cdots,s.$$

并称 R_j 为 Riesz 变换，R_j^* 是与 R_j 配对的 Riesz 变换，$\tilde{R}_j$ 是与 R_j 相伴的 Riesz 变换.

R_j、$\tilde{R}_j$、R_j^* 的核函数分别记为 $K_j(m)$、$\tilde{K}_j(m)$和 $K_j(n,m)$，它们定义为

$$K_j(m)=(\tilde{X}_j^*I_1(\cdot))(m)$$
$$=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}I_1(\exp tX_j\cdot m)\bigg|_{t=0},$$

$$\tilde{K}_j(m)=(\tilde{X}_jI_1(\cdot))(m)$$
$$=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}I_1(p(m)\exp tX_j\cdot o)\bigg|_{t=0},$$

$$K_j(n,m)=\widetilde{X}_j^*\{I_1(n^{-1}\cdot m)\}$$
$$=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}I_1(n^{-1}\cdot \exp tX_j\cdot m)\Big|_{t=0},$$

其中 $j=1,2,\cdots,s$. 从而有如下定理:

定理 2.21 Riesz 变换 R_j 和 $\widetilde{R}_j$、R_j^* 都是奇异积分算子,对 $f\in C^\infty(M)$ 分别有

$$(R_jf)(m)=\mathrm{P.V.}K_j(\cdot)*f(m);$$
$$(\widetilde{R}_jf)(m)=\mathrm{P.V.}\widetilde{K}_j(\cdot)*f(m);$$
$$(R_j^*f)(m)=\mathrm{P.V.}\int_M K_j(n,m)f(n)\mathrm{d}n$$

成立.

证明 令 $I_{1,\varepsilon}(m)$ 为 M 中的集合 $\{m\in M,|m|>\varepsilon\}$ 的特征函数与 $I_1(m)$ 的乘积,其中 $|m|$ 与 m 与 o 两点间的 Riemann 距离. 将 $I_{1,\varepsilon}(m)$ 代替 $K_j(m)$, $\widetilde{K}_j(m)$ 和 $K_j(n,m)$ 的定义式中的 $I_1(m)$ 就定义了函数 $K_{j,\varepsilon}(m)$、$\widetilde{K}_{j,\varepsilon}(m)$ 和 $K_{j,\varepsilon}(n,m)$,且可得

$$\mathrm{P.V.}K_j(\cdot)*f(m)=\lim_{\varepsilon\to 0}K_{j,\varepsilon}(\cdot)*f(m),$$
$$\mathrm{P.V.}\widetilde{K}_j(\cdot)*f(m)=\lim_{\varepsilon\to 0}\widetilde{K}_{j,\varepsilon}(\cdot)*f(m),$$
$$\mathrm{P.V.}\int_M K_j(n,m)f(n)\mathrm{d}n$$
$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_M K_{j,\varepsilon}(n,m)f(n)\mathrm{d}n.$$

首先考虑

$$K_{j,\varepsilon}(\cdot)*f(m)=\int_K\int_M K_{j,\varepsilon}(kn^{-1}\cdot m)f(n)\mathrm{d}n\mathrm{d}k,$$

其中

$$kn^{-1}\cdot m=kp(n)^{-1}\cdot m=kp(n)^{-1}p(m)\cdot o$$
$$=k(p(m)^{-1}p(n))^{-1}\cdot o$$

令

$$g(p(n))=\int_K K_{j,\varepsilon}(kp(n)^{-1}\cdot o)\mathrm{d}k,$$

则容易验证对任意的 $n\in M$ 和 $k\in K$ 均有

$$g(p(n)k) = g(p(n)) \equiv g(n)$$

成立. 因此在 $K_{j,\epsilon}(\cdot) * f(m)$的积分表达式中可用 M 上的等度量变换 $p(m)^{-1}$作变量置换 $p(m)^{-1}\cdot n \to n$,得到

$$K_{j,\epsilon}(\cdot) * f(m) = \int_K \int_M K_{j,\epsilon}(kn^{-1} \cdot o) f(m \cdot n) \mathrm{d}n \mathrm{d}k.$$

由此可得到当 $f \in C^\infty(M)$时 $K_{j,\epsilon}(\cdot) * f(m)$也是 M 上的 C^∞函数. 因为

$$(K_{j,\epsilon}(\cdot))_\lambda^\wedge = (I_{1,\epsilon}(\cdot))_\lambda^\wedge \mathrm{d}\rho_\lambda(X_j),$$

设 $f \in C^\infty(M)$的 Fourier 级数是

$$f(m) = \sum_{\lambda \in \hat{M}} d_\lambda \mathrm{Tr}(\hat{f}_\lambda T_\lambda(m)),$$

则可得

$$\begin{aligned} &K_{j,\epsilon}(\cdot) * f(m) \\ &= \sum_{\lambda \in \hat{M}} d_\lambda \mathrm{Tr}((I_{1,\epsilon}(\cdot))_\lambda^\wedge \mathrm{d}\rho_\lambda(X_j)\ \hat{f}_\lambda T_\lambda(m)). \end{aligned}$$

依第1章的1.5.4小节中所述,可得

$$\sum_{j=1}^{s} \mathrm{d}\rho_\lambda(X_j)\ \overline{\mathrm{d}\rho_\lambda(X_j)'} \leqslant \mu_\lambda I,$$

其中 I 是 d_λ 阶的单位阵,两个方阵 $A \leqslant B$ 是指 $B-A$ 是半定正的,从而当$0 \neq \lambda \in \hat{M}$时,

$$\mu_\lambda^{-\frac{1}{2}} \mathrm{d}\rho_\lambda(X_j),\ j = 1,2,\cdots,s$$

的每个矩阵系数的绝对值都不超过1. 由 $I_1(m)$在 M 上可积,就可得

$$\lim_{\epsilon \to 0} (I_{1,\epsilon}(\cdot))_\lambda^\wedge = \begin{cases} 0, & \text{若 } \lambda = 0; \\ \mu_\lambda^{-\frac{1}{2}} I_\lambda, & \text{若 } 0 \neq \lambda \in \hat{M}. \end{cases}$$

因此,当 $f \in C^\infty(M)$时,由引理1.18就得

$$\begin{aligned} (R_j f)(m) &= \lim_{\epsilon \to 0} K_{j,\epsilon} * f(m) \\ &= \sum_{0 \neq \lambda \in \hat{M}} d_\lambda \mathrm{Tr}(\mu_\lambda^{-\frac{1}{2}} I_\lambda \mathrm{d}\rho_\lambda(X_j)\ \hat{f}_\lambda T_\lambda(m)). \end{aligned} \tag{2.129}$$

以下再考虑

$$\widetilde{K}_{j,\varepsilon}(\cdot) * f(m) = \int_K \int_M \widetilde{K}_{j,\varepsilon}(kn^{-1} \cdot m) f(n) \mathrm{d}n \mathrm{d}k.$$

由以上的讨论可作 $p(m)^{-1} \cdot n \to n$ 的变量置换而得到

$$\begin{aligned}
&\widetilde{K}_{j,\varepsilon}(\cdot) * f(m) \\
&= \int_K \int_M \widetilde{K}_{j,\varepsilon}(kn^{-1} \cdot o) f(m \cdot n) \mathrm{d}n \mathrm{d}k \\
&= \int_K \int_M \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \big[I_{1,\varepsilon}(kp(n)^{-1} \exp tX_j \cdot o) \\
&\quad - I_{1,\varepsilon}(kn^{-1} \cdot o) \big] f(mn) \mathrm{d}n \mathrm{d}k \\
&= J_{1,\varepsilon} + J_{2,\varepsilon},
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
J_{1,\varepsilon} &= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \int_M I_{1,\varepsilon}(n^{-1} \cdot o) \\
&\quad \times (f(m \exp tX_j \cdot n) - f(mn)) \mathrm{d}n \\
&= \int_M I_{1,\varepsilon}(n^{-1} \cdot o) \sum_{\lambda \in \widehat{M}} d_\lambda \\
&\quad \times \operatorname{Tr}(\hat{f}_\lambda \rho_\lambda(p(m)) \mathrm{d}\rho_\lambda(X_j) \rho_\lambda(p(n)) I_\lambda) \mathrm{d}n, \\
J_{2,\varepsilon} &= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left\{ \int_{D_1(t,\varepsilon)} - \int_{D_2(t,\varepsilon)} \right\} \\
&\quad \times I_1(n^{-1} \cdot o) f(m \exp tX_j \cdot n) \mathrm{d}n, \\
D_1(t,\varepsilon) &= \{m \in M, |m| \leqslant \varepsilon\} \\
&\quad \backslash \{m \in M, |\exp(-tX_j)m| \leqslant \varepsilon\}, \\
D_2(t,\varepsilon) &= \{m \in M, |\exp(-tX_j)m| \leqslant \varepsilon\} \\
&\quad \backslash \{m \in M, |m| \leqslant \varepsilon\}.
\end{aligned}$$

同定理2.18中的证明相似，可得到

$$\lim_{\varepsilon \to 0} J_{2,\varepsilon} = 0.$$

由此可得

$$\begin{aligned}
\mathrm{P.V.}\widetilde{K}_j(\cdot) * f(m) &= \lim_{\varepsilon \to 0} \widetilde{K}_{j,\varepsilon}(\cdot) * f(m) \\
&= \int_M I_1(n^{-1} \cdot o) \sum_{\lambda \in \widehat{G}} d_\lambda
\end{aligned}$$

$$\times \operatorname{Tr}(\hat{f}_\lambda \rho_\lambda(p(m))\mathrm{d}\rho_\lambda(X_j)\rho_\lambda(p(n))I_\lambda)\mathrm{d}n$$

$$= \sum_{0\neq\lambda\in\hat{M}} d_\lambda \mu_\lambda^{-\frac{1}{2}}$$

$$\times \operatorname{Tr}(\hat{f}_\lambda \rho_\lambda(p(m))\mathrm{d}\rho_\lambda(X_j)I_\lambda)$$

$$= (\tilde{X}_j(I_1 f))(m) = (\tilde{R}_j f)(m). \tag{2.130}$$

最后考虑

$$\int_M K_{j,\varepsilon}(n,m)f(n)\mathrm{d}n$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\int_M (I_{1,\varepsilon}(n^{-1}\exp tX\cdot m)$$

$$- I_1(n^{-1}m))f(n)\mathrm{d}n,$$

因为 $I_1(m)$ 具有以下性质:

$I_1(k\cdot n)=I_1(n)$ 对任意的 $n\in M$, $k\in K$ 成立.

从而可得

$$\int_M K_{j,\varepsilon}(n,m)f(n)\mathrm{d}n$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\int_M I_{1,\varepsilon}(n^{-1}\cdot o)$$

$$\times \{f(\exp tX_j mn) - f(mn)\}\mathrm{d}n + J_{2,\varepsilon}$$

$$= \int_M I_{1,\varepsilon}(n^{-1}\cdot o)(\tilde{X}_j^* f)(mn)\mathrm{d}n$$

$$+ J_{2,\varepsilon}$$

$$= I_{1,\varepsilon} * (\tilde{X}_j^* f)(m) + J_{2,\varepsilon}, \tag{2.131}$$

其中

$$J_{2,\varepsilon} = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left\{\int_{D_1(t,\varepsilon)} - \int_{D_2(t,\varepsilon)}\right\}$$

$$\times I_{1,\varepsilon}(n^{-1}\cdot o)f(\exp tX_j\cdot mn)\mathrm{d}n.$$

同定理2.18证明相似,可得

$$\lim_{\varepsilon\to 0} J_{2,\varepsilon} = 0,$$

从而在(2.131)中令 $\varepsilon\to 0$,得

$$\mathrm{P.V.}\int_M K_j(n,m)f(n)\mathrm{d}n$$

$$= \lim_{\epsilon\to 0}\int_M K_{j,\epsilon}(n,m)f(n)\mathrm{d}n$$

$$= I_1(\cdot) * (\widetilde{X}_j^* f)(m) = (R_j^* f)(m).$$

这就完成了定理的证明. ▌

以下讨论定理2.21中的三个核函数的性质及三者之间的关系，即如下定理：

定理 2.22 Riesz 型变换 R_j、$\widetilde{R}_j$ 和 R_j^* 的核函数 $K_j(m)$、$\widetilde{K}_j(m)$和 $K_j(n,m)$有如下的性质：

(1) $K_j(m)$在 $M\backslash\{o\}$上是 C^∞的函数，而在 o 点附近在测地法坐标系中则有

$$K_j(m) = C_1 x_j |m|^{-s-1} + r_j(m),$$

其中 C_1仅依赖于 G、$r_j(m)$在 M 上可积，$m=\exp X\cdot o, X\in\Omega_0, X=x_1X_1+\cdots+x_sX_s$；

(2) $\widetilde{K}_j(m)$在 $M_o\backslash\{o\}$上是 C^∞的函数，且有

$$\widetilde{K}_j(m) = K_j(m) + \tilde{r}_j(m),$$

其中 $\tilde{r}_j(m)$在 M 上可积；

(3) $K_j(n,m)$在 $M\times M\backslash\{(n,n)\in M\times M\}$上是 C^∞的函数，并且有

$$K_j(n,m)$$

$$= K_j(n^{-1}\cdot m) + \sum_{k=1}^{s} a_{kj}(m) K_k(n^{-1}\cdot m) + r_j(n,m)$$

成立. 其中

$$|r_j(n,m)| \leqslant A_0 |n^{-1}\cdot m|^{1-s},$$

$$|a_{kj}(m)| \leqslant A_0 |m|,$$

A_0为仅依赖于 M 的正常数，$|n^{-1}m|$是 m、n 两点间的 Riemann 距离，$s=\dim M$.

证明 先证定理中的(1)：设 $m=\exp X\cdot o, X\in\Omega_0$，

则有 $\quad \exp tX_j \exp X\cdot o$

$$= \exp Ad(\exp tX_j)(X)\exp tX_j\cdot o$$

$$= \exp X \cdot \exp\left(tX_j - \frac{I - e^{-adX}}{adX} adX(tX_j) + O(t^2)\right) \cdot o$$

$$= \exp(X + A(X)^{-1}(tX_j) - B(X)(tX_j) + O(t^2)) \cdot o,$$

其中

$$B(X) = A(X)^{-1}\left\{\Pi\left(\frac{I - e^{-adX}}{adX} adX\right)\Pi\Big|_{\mathfrak{p}}\right\},$$

$$A(X) = \Pi\left(\frac{I - e^{-adX}}{adX}\right)\Pi\Big|_{\mathfrak{p}},$$

Π 是 $\mathfrak{g}$ 到 $\mathfrak{p}$ 上的正交投影.

现在对 $m = \exp X \cdot o$ 令

$$A(X)^{-1} - B(X) = (a_{ij}(m)),$$

$$(b_{ij}(m)) = (a_{ij}(m)) - I,$$

其中 I 是 s 阶的单位阵. 从而可得

$|b_{ij}(m)| \leqslant A_0 |m|$ 至少对 $|m| \leqslant a$ 成立,

其中 A_0 仅依赖于 G 和 $a > 0$.

现在由定理2.16和2.17,同定理2.19的证明一样就可证明定理中的(1).

定理中的(2)的证明与定理中的(1)一样,与之不同的仅是取

$$A(X) = (a_{ij}(m)).$$

因此,$\tilde{K}_j(m)$在 o 点附近的表达式就与 $K_j(m)$相似,差别仅在于可积的部分,所以定理中的(2)成立.

最后证明定理中的(3):研究函数

$$I_1(n^{-1}\exp tX_j m),$$

并设 $m = \exp X \cdot o, n = \exp Y \cdot o, n^{-1} \cdot m = \exp Z \cdot o$.

记 $\delta = X - Y$,所以 $Y = X - \delta$,且有

$$\begin{aligned}\exp(-Y) \cdot o &= \exp(-X + \delta) \cdot o \\ &= \exp(-X)\exp \\ &\quad \times (-T(-X)(\delta) - O(|\delta|^2)) \cdot o,\end{aligned}$$

$\exp tX_j \exp X \cdot o$

$$= \exp X \exp(tX_j - T(X)B(X)(tX_j) + O(t^2)) \cdot o.$$

其中 $T(X)=A(X)$. 由此可得

$$Z = T(-X)\delta + O(|\delta|^2) \equiv Z(X,Y),$$

$$n^{-1}\exp tX_j \cdot m$$
$$= \exp Z \exp(tX_j - T(X)B(X)(tX_j) + O(t^2)) \cdot o.$$

现在记 $Z=z_1X_1+\cdots+z_sX_s$ 为自变量，把 X 看作参变量，则可得

$$n^{-1}\exp tX_j \cdot m$$
$$= \exp(Z + tE(Z,X)(X_j) + O(t^2)) \cdot o,$$

其中

$$E(Z,X) = A(Z)^{-1}(I - T(X)B(X))$$
$$= I - T(X)B(X) + (A(Z)^{-1} - I)(I - T(X)B(X)),$$

其中 $m=\exp X\cdot o, n^{-1}\cdot m=\exp Z\cdot o$. 令

$$-T(X)B(X) = (a_{kj}(m)),$$
$$(A(Z) - I)(I - T(X)B(X)) = (b_{k,j}(Z,X)),$$

则可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}I_1(n^{-1}\exp tX_j \cdot m)$$

$$= \sum_{k=1}^{s}(a_{kj}(m) + b_{kj}(Z,m))\frac{\partial}{\partial z_k} + \frac{\partial}{\partial z_j}.$$

因为在 $|Z|<a$ 上，

$$|b_{k,j}(Z,X)| \leqslant A_0|Z|, \ 1 \leqslant k,j \leqslant s;$$

在 Ω_0 上，

$$|a_{k_j}(m)| \leqslant A_0|m|, \ 1 \leqslant k,j \leqslant s, k \neq j.$$

经过与定理2.20同样的具体计算，就得到定理中的(3)，从而证明了定理. ▌

设 $Y_{s+1},\cdots,Y_n$ 是 $\mathfrak{k}$ 的一组标准正交基，其中 $n=\dim G$. 则由(2.128)式，$\tilde{Y}^*_{s+1},\cdots,\tilde{Y}^*_n$ 也是 M 上的向量场. 在测地法坐标系中，由

$$\exp tY_j \exp X \cdot o$$

$$= \exp(X - t\mathrm{ad}X(Y_j) + O(t^2)) \cdot o$$
$$= \exp X \exp(-tT(X)C(X)(Y_j) + O(t^2)) \cdot o,$$

就得到

$$n^{-1} \cdot \exp tY_j \cdot m = \exp Z \exp(-tT(X)C(X)(Y_j) + O(t^2)) \cdot o$$

其中

$$C(X) = \Pi \mathrm{ad}X(I - \Pi)$$

现记

$$-T(X)C(X) = (b_{kj}(X)). \tag{2.132}$$

则有如下定理：

定理2.23　设 $R_j^* = \tilde{Y}_j^*(-\Delta)^{-\frac{1}{2}}$，$j=s+1,\cdots,n$. 并置

$$K_j(n,m) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} I_1(n^{-1} \cdot \exp tY_j \cdot m)|_{t=0},$$

则对于 $f \in C^\infty(M)$，有

$$(R_j^* f)(m) = \mathrm{P.V.}\int_M K_j(n,m) f(n) \mathrm{d}n$$

成立. 且对 $j=s+1,\cdots,n$，有

$$K_j(n,m) = \sum_{k=1}^{s} b_{kj}(X) K_k(n^{-1} \cdot m) + r_j(n,m).$$

其中 $b_{kj}(X)$ 由(2.132)式给出，$K_k(m)$ 由定理2.21给出，且存在仅依赖于 M 的正数 A_0，使得

$$|r_j(n,m)| \leqslant A_0 |n^{-1}m|^{1-s}.$$

定理2.23的证明与定理2.21和定理2.22相同.

代替紧致李群上的(2.112)式，当 M 不是紧致李群时(这时必然有 $s<n$)，有如下定理：

定理2.24　设 Δ 是紧致齐性空间上的 Laplace-Beltrami 算子，$\mathrm{Ker}(\Delta)$ 是 Δ 的核，$S'(M)$ 是 $C^\infty(M)$ 上的广义函数所成的空间，则对每个 $f \in S'(M)/\mathrm{Ker}(\Delta)$，有

$$-\left((R_1^*)^2 + \cdots + (R_s^*)^2 + (R_{s+1}^*)^2 + \cdots + (R_n^*)^2\right) f = f$$

成立.

证明 只须对不可约酉表示在 M 上的限制 $T_\lambda(m)$ $(0\neq\lambda\in\widehat{M})$证明上式成立即可. 由

$$I_\alpha\{T_\lambda(m)\} = \mu_\lambda^{-\frac{1}{2}\alpha}T_\lambda(m)$$

和(2.132)式,当 $\lambda\neq0$时,即得

$$\begin{aligned}R_j^*\{T_\lambda(m)\} &= \mu_\lambda^{-\frac{1}{2}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}T_\lambda(\exp tX_j\cdot m)\Big|_{t=0}\\ &= \mu_\lambda^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}\rho_\lambda(X_j)T_\lambda(m),\end{aligned}$$

由此易得 $\lambda\neq0$时,

$$\begin{aligned}&-\{(R_1^*)^2+\cdots+(R_n^*)^2\}\{T_\lambda(m)\}\\ &= \mu_\lambda^{-1}\Big\{\sum_{j=1}^{s}-(\mathrm{d}\rho_\lambda(X_j))^2\\ &\quad+\sum_{j=s+1}^{n}-(\mathrm{d}\rho_\lambda(Y_j))^2\Big\}T_\lambda(m).\end{aligned}$$

由1.5.4小节知

$$\sum_{j=1}^{s}(\mathrm{d}\rho_\lambda(X_j))^2+\sum_{j=s+1}^{n}(\mathrm{d}\rho_\lambda(Y_j))^2 = -\mu_\lambda I,$$

其中 I 是 d_λ 阶的单位阵. 从而定理得证. ▌

以下讨论紧致齐性空间上的奇异积分.

仍记 $X_1,X_2,\cdots,X_s$ 为 $\mathfrak{p}$ 的一组标准正交基. 对 $x\in\mathfrak{p}$,

$$X = x_1X_1+x_2X_2+\cdots+x_sX_s$$

给出了 X 的坐标$(x_1,\cdots,x_s)$.

记 A_k 为 $\mathfrak{p}$ 作为欧氏空间时,$\mathfrak{p}$ 上的 k 次齐次调和多项式全体所成的空间,对

$$P_k(x_1,\cdots,x_s)\in A_k,$$

相应的微分算子多项式是

$$P_k(\widetilde{X}^*) = P_k(\widetilde{X}_1^*,\cdots,\widetilde{X}_s^*),$$

$$P_k(\widetilde{X}) = P_k(\widetilde{X}_1,\cdots,\widetilde{X}_s).$$

则可定义 M 上的三种形式的奇异积分算子，它们的核函数是

$$K_k(m) = (P_k(\tilde{X}^*)I_k(\cdot))(m),$$

$$\tilde{K}_k(m) = (P_k(\tilde{X})I_k(\cdot))(m),$$

$$K_k(n,m) = P_k(\tilde{X}^*)\{I_k(n^{-1}m)\}.$$

其中 $I_k(m)$ 是 Riesz 位势 I_k 的核函数. 而第三个核函数可将 n 看作常值而对变元 m 求导.

上述三个核函数对应的奇异积分算子是：对 $f\in C^\infty(M)$，有

$$(T_kf)(m) = \text{P. V.}\, K_k(\cdot) * f(m),$$

$$(\tilde{T}_kf)(m) = \text{P. V.}\, \tilde{K}_k(\cdot) * f(m),$$

$$(T_k^* f)(m) = \text{P. V.}\int_M K_k(n,m)f(n)\mathrm{d}n.$$

其中 $\tilde{T}_k$ 和 T_k^* 还可表示成

$$\tilde{T}_k = P_k(\tilde{X})(-\Delta)^{-\frac{1}{2}k},$$

$$T_k^* = P_k(\tilde{X}^*)(-\Delta)^{-\frac{1}{2}k}.$$

则同定理2.21和定理2.22相似，可得如下定理：

定理 2.25 设 $K_k(m)$、$\tilde{K}_k(m)$ 和 $K_k(n,m)$ 分别是 T_k、$\tilde{T}_k$ 和 T_k^* 的核函数，则有

(1) $K_k(m)$ 在 $M\backslash\{o\}$ 上是 C^∞ 的，$\tilde{K}_k(m)$ 在 $M_o\backslash\{o\}$ 上是 C^∞ 的，$K_k(n,m)$ 在 $M\times M\backslash\{(n,n),n\in M\}$ 上 C^∞.

(2) 在 o 点附近

$$K_k(m) = C_kP_k(x_1,\cdots,x_s)|m|^{-s-k} + r_k(m);$$

$$\tilde{K}_k(m) = K_k(m) + \tilde{r}_k(m),$$

$$K_k(n,m) = K_k(n^{-1}\cdot m) + \sum_{j=1}^{s}a_{jk}(m)K_j(n^{-1}m) + r_k(n,m),$$

其中 $m=\exp X\cdot o$，$X=x_1X_1+\cdots+x_sX_s$，

$r_k(m)$，$\tilde{r}_k(m)$ 在 M 上可积，

$$|r_k(n,m)| \leqslant A_0|n^{-1}m|^{1-s},$$

$$|a_{jk}(m)|\leqslant A_0|m|,\quad j=1,2,\cdots,s.$$

C_k 仅依赖于 M 和 k，A_0仅依赖于 M.

当作用于 $f\in C^\infty(M)$上时，设

$$f(m)=\sum_{\lambda\in\hat{M}}d_\lambda\mathrm{Tr}(\hat{f}_\lambda T_\lambda(m)),$$

则有

$$(T_kf)(m)=\sum_{0\neq\lambda\in\hat{M}}\mu_\lambda^{-\frac{1}{2}k}d_\lambda$$

$$\times\mathrm{Tr}(I_\lambda P_k(\mathrm{d}\rho_\lambda(X))\hat{f}_\lambda T_\lambda(m)),$$

$$(T_k^*f)(m)=\sum_{0\neq\lambda\in\hat{M}}\mu_\lambda^{-\frac{1}{2}k}d_\lambda$$

$$\times\mathrm{Tr}(\hat{f}_\lambda P_k(\mathrm{d}\rho_\lambda(X))T_\lambda(m)).$$

其中

$$P_k(\mathrm{d}\rho_\lambda(X))$$

$$\equiv P_k(\mathrm{d}\rho_\lambda(X_1),\mathrm{d}\rho_\lambda(X_2),\cdots,\mathrm{d}\rho_\lambda(X_s)).$$

更一般地，可定义算子 T 为

$$T=\sum_{k=1}^\infty a_kT_k.$$

T 的核函数 $K(m)$可写成

$$K(m)=\Omega(X/|X|)|m|^{-s}+r(m),$$

其中 $m=\exp X\cdot o,X\in\Omega_0,r(m)$在 M 上可积，设

$$X=x_1X_1+\cdots+x_sX_s,$$

则有

$$\Omega(X/|X|)=\sum_{k=1}^\infty a_kC_kP_k(x_1,\cdots,x_s)|X|^{-k}.$$

定理2.25及上面的其他结果的证明与2.6.2小节中的证明相似.在此从略.

2.6.4 附记

在本章的各个定理中，若将 Riesz 位势 I_k 及其核函数 $I_k(\cdot)$ $(k=1,2,\cdots,n$，对紧致齐性空间则取 $k=1,2,\cdots,s)$换为 Bessel 位

势 J_k 及其核函数 $J_k(\cdot)$，就定义了 Bessel 变换($k=1$)及相应的奇异积分算子. 如果从核函数的角度来看，用 Bessel 位势的核函数来建立紧致李群和紧致齐性空间上的奇异积分，它的核函数就更加简单且便于计算. 而当 G 是一个交换的紧致李群时，Riesz 位势与 Bessel 位势就变为相同了，因为这时等价于 δ(全体正根之和的一半)为零.

对紧致李群和紧致齐性空间上的奇异积分的研究，主要的不应该是它的局部性质，如同某些研究者所作的那样，用欧氏空间上的奇异积分核来拼出流形上的奇异积分核，而是应该研究其整体的性质，本节正是这样考虑的.

§2.7　Riesz—龚平均在逼近论中的应用

在§1.6中定义的 Riesz—龚平均与广义 Riesz—龚平均都是紧致李群与紧致齐性空间上的三角多项式. 自然希望能用它们来得到紧致李群与紧致齐性空间上逼近论的若干结果. 另一方面，由定理2.8可以得到当 $\delta=\frac{1}{2}(n-1)$，$n=\dim G$ 时，定理2.9与定理2.11的条件已不成立，因而 $\delta=\frac{1}{2}(n-1)$是紧致李群上 Riesz—龚平均的临界指标. 于是自然要问，广义的 Riesz—龚平均的临界指标是什么?

上述问题的解决，均依赖于得到广义的 Riesz—龚平均具体的 Poisson 求和公式，这一问题对广义的 Abel—龚平均同样需要解决. 我们用渐近展开的方法来讨论广义的 Riesz—龚平均的核函数，它同样适用于讨论广义的 Abel 平均.

2.7.1　广义的 Riesz—龚平均的渐近表示

在定理2.5和2.7中，当 ϕ 是$[0,+\infty)$上具有适当性质的函数时，它定义了紧致李群上 Fourier 级数的 ϕ—平均

$$S_t^\phi(f,x)=K_t^\phi(\cdot)*f,$$

其中核函数 $K_t^\phi(x)$是 G 上的中心函数，它等于

$$K_t^\phi(x)=\sum_{\lambda\in\hat{G}}\phi(|\lambda+\delta|)d_\lambda\chi_\lambda(x).$$

而 $K_t^\phi(x)$ 的 Poisson 求和公式是

$$K_t^\phi(\exp h)$$
$$=B_G\Pi\{t^{-n}D_0(\cdot)^{-1}W^\phi_{\frac{1}{2}n-1}(t^{-1}|\cdot|)\}(\exp h),$$

其中 $W^\phi_{\frac{1}{2}n-1}(|y|)$ 就是 $\phi(|y|)$ 在 R^n 中的 Fourier 变换.

特别取

$$\phi(t)=(1-t^a)^\delta_+ \text{ 或}(1-t^2)^{\delta+k}_+$$

时,相应的核函数记为

$$K_t^{a,\delta}(x),\ K_t^{\delta+k}(x),\ W^{a,\delta}_{\frac{1}{2}n-1}(|y|),\ W^{\delta+k}_{\frac{1}{2}n-1}(|y|),$$

其中

$$W^{\delta+k}_{\frac{1}{2}n-1}(|y|)$$
$$=2^{\delta+k}\Gamma(\delta+k)|y|^{-\frac{1}{2}n-\delta-k}J_{\frac{1}{2}n+\delta+k}(|y|).\quad(2.133)$$

则有如下定理:

定理 2.26 设 $\mathrm{Re}a>0$, $\mathrm{Re}\delta>0$,则广义的 Riesz—粪平均核函数 $K_t^{a,\delta}(x)$ 有以下的渐近表示:

$$K_t^{a,\delta}(x)=\left(\frac{a}{2}\right)^\delta\left\{K_t^\delta(x)+\sum_{k=1}^p C_kK_t^{\delta+k}(x)+r_t(x)\right\},$$

对应地,$W^{a,\delta}_{\frac{1}{2}n-1}(|h|)$ 有以下的渐近表示:

$$W^{a,\delta}_{\frac{1}{2}n-1}(|h|)$$
$$=\left(\frac{a}{2}\right)^\delta\left\{W^\delta_{\frac{1}{2}n-1}(|h|)+\sum_{k=1}^p C_kW^{\delta+k}_{\frac{1}{2}n-1}(|h|)+R(|h|)\right\},$$

其中常数 $C_1,\cdots,C_p$ 仅依赖于 a、δ 和 G,$W^{\delta+k}_{\frac{1}{2}n-1}(|h|)$ 如(2.133)式,

$$r_t(\exp h)=B_G\Pi\{t^{-n}D_0(\cdot)^{-1}R(t^{-1}|\cdot|)\}(\exp h),$$

$R(|h|)$ 是 $\mathfrak{h}$ 上 C^∞ 的径向函数,适合

$$|R(|h|)|\leqslant A(1+|h|)^{-n-b},$$

$$\left|\left(\frac{\partial}{\partial h}\right)^m R(|h|)\right|\leqslant A(1+|h|)^{-n-b-|m|},$$

其中 b 可取到 $(0,\mathrm{Re}a)$ 中任一正数,$m=(m_1,\cdots,m_r)$ 是 $\mathfrak{h}$ 中的非负

整格点，$|m|=m_1+m_2+\cdots+m_r$. 其中 A 是不依赖于 $h\in\mathfrak{h}$ 的适当的正常数.

证明　设 $u=1-t^2$，即 $t=(1-u)^{\frac{1}{2}}$，在 $0\leqslant t\leqslant 1$ 上，函数

$$(1-t^a)^\delta(1-t^2)^{-\delta}=\left(\frac{a}{2}\right)^\delta(1+b_1u+b_2u^2+\cdots)^\delta, \tag{2.134}$$

其中 $(1-u)^{\frac{1}{2}a}$ 在 $u=0$ 的展开的幂级数记为

$$(1-u)^{\frac{1}{2}a}=1-\frac{a}{2}u(1+b_1u+b_2u+\cdots).$$

显然，存在正数 $0<b_0<1$，使当 $|u|\leqslant b_0$ 时，

$$|b_1u+b_2u+\cdots|<1,$$

从而在 $|u|<b_0$ 上 $(1+b_1u+b_2u^2+\cdots)^\delta$ 可展成幂级数

$$(1+b_1u+b_2u^2+\cdots)^\delta=1+c_1u+c_2u^2+\cdots. \tag{2.135}$$

因此可记

$$(1-t^a)_+^\delta$$
$$=\left(\frac{a}{2}\right)^\delta\left\{(1-t^2)_+^\delta+\sum_{k=1}^{p}C_k(1-t^2)_+^{\delta+k}+B_+(t)\right\},$$

其中

$$B_+(t)=\begin{cases}0, & 若\ t>1;\\ B(t), & 若\ 0\leqslant t\leqslant 1,\end{cases}$$

$$B(t)=\left(\frac{a}{2}\right)^{-\delta}\left((1-t^a)^\delta-\left(\frac{a}{2}\right)^\delta\times\sum_{k=0}^{p}C_k(1-t^2)^{\delta+k}\right). \tag{2.136}$$

由(2.134)和(2.135)式及 $u=1-t^2$，即可得 $B(t)$ 在 $(1-b_0)^{\frac{1}{2}}\leqslant t\leqslant 1$ 上是 C^∞ 的，且其直到 $[\mathrm{Re}\delta]+p$ 阶的导数在 $t=1$ 点的值为零，对 $B(t)$ 直接求导，又可得到它在 $0<t<1$ 上是 C^∞ 的，从而可得 $B_+(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 上具有直到 $[\mathrm{Re}\delta]+p$ 阶的连续导数，且在 $0<t<1$ 上存在正常数 A_k，使当 $k=1,2,\cdots$ 且 $k\leqslant p$ 时，有下式成立：

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^k B(t) = A_k t^{\alpha-k} + O(t^{\alpha+1-k}).$$

为讨论 $B_+(|h|)$的 Fourier 变换，要用到分数导数 I^α，$\alpha>0$，对 $\mathfrak{h}$ 上的 C^∞ 速降函数类 $S(\mathfrak{h})$中的函数 f，它定义为

$$(I^\alpha f)^\wedge(h) = \hat{f}(h)|h|^\alpha, \tag{2.137}$$

容易验证

$$(I^\alpha f)(h) = c_0\int_{\mathfrak{h}}(\Delta_y^k f)(h)|y|^{-r-\alpha}\mathrm{d}y, \tag{2.138}$$

其中 $r=\dim\mathfrak{h}$，$k>\alpha$ 为正整数，c_0仅依赖于 α、k 和 r，

$$(\Delta_y f)(h) = f(y+h) - f(h),$$

$$(\Delta_y^{k+1} f)(h) = (\Delta_y(\Delta_y^k f))(h).$$

容易验证，当 f 是 $\mathfrak{h}$ 上局部可积的缓增函数时，(2.137)式对 f 仍有定义，这时 $\hat{f}$是 f 作为广义函数时的 Fourier 变换，且有如下引理：

引理 2.11 设 f 是 $\mathfrak{h}$ 上局部可积的缓增函数，作为广义函数，它的 Fourier 变换记为 $\hat{f}$. 若存在 $\alpha>0$，使当 $k>\alpha$ 时，

$$\int_{\mathfrak{h}}(\Delta_y^k f)(h)|y|^{-r-\alpha}\mathrm{d}y \tag{2.139}$$

对几乎所有的 $h\in\mathfrak{h}$ 可积，且(2.139)式作为 h 的函数在 $\mathfrak{h}$ 上可积，则 $\hat{f}(h)$是定义于 $\mathfrak{h}$ 上的可测函数，且 $\hat{f}(h)|h|^\alpha$ 在 $\mathfrak{h}$ 上连续、有界，并且使(2.137)和(2.138)式对 f 也成立.

引理 2.11用 Fourier 变换即可证明.

当 $r=1$时，取非负整数 m，适合$0<\mathrm{Re}\,\alpha+r-m\leqslant 1$，且取 $k=2$；当 $r\geqslant 2$时，取 m 为偶数，适合$0<\mathrm{Re}\,\alpha+r-m\leqslant 2$，且取 $k=3$. 置

$$B_+^{(m)}(|h|) = (\Delta^{\frac{1}{2}m}B_+(\cdot))(|h|),$$

其中 Δ 是 $\mathfrak{h}$ 上的 Laplace 算子，则 $\Delta^{\frac{1}{2}m}$总是 $\mathfrak{h}$ 上的微分算子. 再令 b 适合$0<b<\mathrm{Re}\,\alpha+r-m$，置

$$(I^b B_+^{(m)})(h)$$

$$= c_0\int_{\mathfrak{h}}(\Delta_y^k B_+^{(m)})(|h|)|y|^{-r-b}\mathrm{d}y. \tag{2.140}$$

以下验证(2.140)式右端的被积函数在 $k>b$ 时适合引理2.11

的条件.

将 $\mathfrak{h}$ 分成 $k+2$ 个区域 $D_0, D_1, \cdots, D_{k+1}$，其中

$$D_0 = \left\{ y \in \mathfrak{h}, |y| \leqslant \frac{1}{2k}\min(|h|, 1) \right\},$$

$$D_p = \left\{ y \in \mathfrak{h}, |h + py| \leqslant \frac{1}{2k}\min(|h|, 1) \right\},$$

$$p = 1, 2, \cdots, k,$$

$$D_{k+1} = \mathfrak{h} \Big\backslash \bigcup_{p=0}^{k} D_p.$$

对径向函数 $f(|h|)$，设 x、$y \in \mathfrak{h}$，$|x| \neq |y|$，显然有 $\xi \in \mathfrak{h}$，适合

$$\min\{|x|, |y|\} \leqslant |\xi| \leqslant \max\{|x|, |y|\},$$

使得记 f' 是 f 作为一元函数时的一阶导数时，有

$$f(|x|) - f(|y|) = f'(|\xi|)(|x| - |y|).$$

在以下的估计中，A 仅表示某个正常数，它在不同地方出现时，可代表不同的值，记

$$I_p = \int_{D_p} (\Delta_y^k B_+^{(m)})(h) |y|^{-r-b} \mathrm{d}y,$$

$$p = 0, 1, \cdots, k+1.$$

则由 $y \in D_0$ 时，有

$$\frac{1}{2}|h| \leqslant |h + py| \leqslant 2|h|, \quad p = 0, 1, \cdots, k.$$

可得到

$$\left| (\Delta_y^k B_+^{(m)})(h) \right| \leqslant A |h|^{\mathrm{Re}\,\alpha - m - k} |y|^k. \tag{2.141}$$

从而，当 $0 < |h| \leqslant 1$ 时，用 (2.141) 式估计，而当 $|h| > 1$ 时，除了用 (2.141) 式估计外，还用 $|y| \leqslant \dfrac{1}{2}$，就可得到

$$|I_0(h)| \leqslant \begin{cases} A|h|^{\mathrm{Re}\,\alpha - m - b}, & 若\ |h| \leqslant 1; \\ A|h|^{-r-1}, & 若\ |h| > 1. \end{cases}$$

当 $y \in D_p$，$p = 1, 2, \cdots, k$ 时，若 $q \neq p$，就有

$$|h + qy| \geqslant \frac{1}{2k}|h|, \quad q \neq p, \quad q = 0, 1, \cdots, k.$$

从而可得 $|y|\geqslant\frac{1}{2k}|h|$，

$$|(\Delta_y^k B_+^{(m)})(h)|\leqslant A(|h|^{\mathrm{Re}\alpha-m}+|h+py|^{\mathrm{Re}\alpha-m}).$$

所以当 $0<|h|\leqslant 1$ 时，用上面的估计式以及

$$|h+py|\leqslant\frac{1}{2k}|h|\text{ 和 }|y|\geqslant\frac{1}{2k}|h|;$$

当 $|h|>1$ 时，用上面的估计式以及

$$|h+py|\leqslant\frac{1}{2k}\text{ 和 }|y|\geqslant\frac{1}{2k}|h|,$$

可得到对 $p=1,2,\cdots,k$，有

$$|I_p(h)|\leqslant\begin{cases}A|h|^{\mathrm{Re}\alpha-m-b}, & |h|\leqslant 1;\\ A(|h|^{\mathrm{Re}\alpha-m-b-r}+|h|^{-r-b}), & |h|>1.\end{cases}$$

当 $y\in D_{k+1}$ 时，若 $|h|\leqslant 1$，则有

$$|y|\geqslant\frac{1}{2k}|h|,$$

$$|h+py|\geqslant\frac{1}{2k}|h|,p=0,1,\cdots,k,$$

可用(2.141)式估计，而当 $|h|>1$ 时，则有

$$|y|\geqslant\frac{1}{2k},\ |h+py|\geqslant\frac{1}{2k},\ p=0,1,\cdots,k,$$

以及

$$B_+^{(m)}(|h|)=0,\text{若 }|h|>1,$$

$$|B_+^{(m)}(h+py)|\leqslant A,p=1,\cdots,k.$$

从而可得

$$|I_{k+1}(h)|\leqslant\begin{cases}A|h|^{\mathrm{Re}\alpha-m-b}, & \text{若 }|h|\leqslant 1;\\ A|h|^{-r-b}, & \text{若 }|h|>1.\end{cases}$$

因而(2.140)式中的被积函数适合引理2.11的条件，又因为 $B_+(|h|)$ 和 $(I^b B_+^{(m)})(|h|)$ 均在 $\mathfrak{H}$ 上可积，从而得到

$$|B_+(\cdot)^\wedge(|h|)|\leqslant A(1+|h|)^{-m-b},$$

其中 A 可取为

$$A = \|B_+(\cdot)^\wedge\|_\infty + \|I^b B_+^{(m)}(\cdot)\|_\infty,$$

而且 $m+b$ 适合

$$0 < m + b < \mathrm{Re}a + r,$$

又对任意小的正数 $\varepsilon>0$,可取到 b,使适合

$$m + b > \mathrm{Re}a + r - \varepsilon.$$

因为 $B_+(|h|)$ 支集是紧致的,所以 $B_+(\cdot)^\wedge(|h|)$ 在 $\mathfrak{h}$ 上 C^∞,由引理2.7和 Fourier 变换的性质,以及

$$R(|h|) = \left(\left(\frac{\mathrm{d}}{t\mathrm{d}t}\right)^m B_+(\cdot)^\wedge\right)(|h|),$$

就容易得到定理中对 $R(h)$ 及其导数的估计,从而定理得证. ▌

附记 更精细的估计可以证明定理中的 b 可取到 $m+b=\mathrm{Re}a+r$. 但它的证明比较繁琐,这里就不给出了. 因为定理2.26的结论在本节中已经够用.

2.7.2 在逼近论中的应用

记

$$T_k = \left\{ \sum_{\lambda\in\hat{G}, |\lambda+\delta|\leqslant k} \mathrm{Tr}(c_\lambda \rho_\lambda(x)), c_\lambda \in \mathrm{Hom}(V_\lambda, V_\lambda) \right\} \tag{2.142}$$

为紧致李群 G 上不超过 k 阶的所有三角多项式所成的有限维复线性空间. 令

$$E_{N,p}(f) = \inf_{T\in T_N} \|f - T\|_p$$

为 f 的 N 阶三角多项式的最佳 L_p 逼近,特别是当 $p=\infty$ 时,将 $E_{N,\infty}(f)$ 简记为 $E_N(f)$,称为 f 用 N 阶三角多项式的最佳一致逼近. 再令 $C^{k,\omega}(G)$、$L_p^{k,\omega}(G)$ 分别为 G 上具有 k 阶连续导数的函数的集,且当 $f\in C^{k,\omega}(G)$ 时,对 f 的任意一个 k 阶偏导数 $f^{(k)}$ 均有

$$|f^{(k)}(x) - f^{(k)}(y)| \leqslant \|f^{(k)}\|_\omega \omega(\mathrm{d}(x,y))$$

的函数 f 全体的集以及在 G 上具有直到 k 阶的所有的 L^p 偏导数,并且当

$$f \in \mathrm{L}_p^{k,\omega}(G)$$

时,对 f 的任意一个 k 阶的 L^p 偏导数 $f^{(k)}$ 均有

$$\|f^{(k)}(\circ)-f^{(k)}(x\circ)\|_p\leqslant\|f^{(k)}\|_{p,\omega}\omega(\mathrm{d}(x,e))$$

的函数 f 全体的集.

其中 ω 是连续模，$\mathrm{d}(x,y)$ 是 G 中两点 x 与 y 间的 Riemann 距离.

令

$$\|f\|_k=\sum_{p=0}^{k}\sup\|f^{(p)}\|_\infty,$$

其中

$$\sup\|f^{(p)}\|_\infty\equiv\sup_{|X_i|=1}\|\tilde{X}_1\cdots\tilde{X}_pf\|_\infty,$$

$$\|f\|_{k,\omega}\equiv\sum_{p=0}^{k}\sup\|f^{(p)}\|_\infty+\sup\|f^{(k)}\|_\omega,$$

其中

$$\sup\|f^{(k)}\|_\omega\equiv\sup_{|X_i|=1}\|\tilde{X}_1\cdots\tilde{X}_kf\|_\omega,$$

$$f^{(k)}=\tilde{X}_1\cdots\tilde{X}_kf.$$

将以上定义中的 L^∞ 模换成 L^p 模，就定义了 $\|f\|_{p,k}$ 和 $\|f\|_{p,k,\omega}$，则有如下定理：

定理 2.27 设 $f\in C^k(G)$，则

$$E_N(f)\leqslant A_1\|f\|_kN^{-k};$$

若 $f\in C^{k,\omega}(G)$，则

$$E_N(f)\leqslant A_2\|f\|_{k,\omega}N^{-k}\omega(1/N);$$

若 $f\in\mathrm{L}_p^k(G)$，则

$$E_{N,p}(f)\leqslant A_3\|f\|_{p,k}N^{-k};$$

若 $f\in\mathrm{L}_p^{k,\omega}(G)$，则

$$E_{N,p}(f)\leqslant A_4\|f\|_{p,k,\omega}N^{-k}\omega(1/N).$$

定理 2.28 若

$$\sum_{N=1}^{\infty}N^{k-1}E_N(f)<+\infty\text{ 或}$$

$$\sum_{N=1}^{\infty}N^{k-1}E_{N,p}(f)<+\infty,$$

则 $f\in C^k(G)$ 或 $f\in\mathrm{L}_p^k(G)$，且有

$$E_N(f^{(k)}) \leqslant B_k \sum_{n \geqslant [\frac{1}{2}N]} n^{k-1} E_n(f);$$

$$E_{N,p}(f^{(k)}) \leqslant C_k \sum_{n \geqslant [\frac{1}{2}N]} n^{k-1} E_{n,p}(f)$$

成立.

定理2.29　$f \in C^{k,\alpha}(G)$或$f \in \mathrm{L}_p^{k,\alpha}(G)$当且仅当$E_N(f) = O(N^{-k-\alpha})$或$E_{N,p}(f) = O(N^{-k-\alpha})$,

其中$\alpha > 0$,当$\omega(t) = t^\alpha, 0 \leqslant t \leqslant 1$时,将$C^{k,\omega}(G)$或$\mathrm{L}_p^{k,\omega}(G)$记为$C^{k,\alpha}(G)$或$\mathrm{L}_p^{k,\alpha}(G)$.

定理2.27至2.29的证明:

设Π_1如引理1.20所定义,记$f_x(y) = f(xy)$,则$(\Pi_1 f_x)(y)$是G上的中心函数,$(\Pi_1 f_x)(\exp h)$作为$\mathfrak{h}$上的函数,它在f是C^∞函数时设有M个从零阶直到k阶的互不相等的偏导函数

$$\left(\left(\frac{\partial}{\partial h}\right)^m (\Pi_1 f_x)\right)(\exp h),$$

其中$m = (m_1, \cdots, m_r)$是$\mathfrak{h}$中的非负整格点,适合$m_1 \geqslant m_2 \geqslant \cdots \geqslant m_r$.

由于对于G的Cartan子群T上的Weyl群对称函数而言,$\{\chi_\lambda(\exp h), \lambda \in \widehat{G}\}$是$\mathrm{L}^2(T)$上线性独立的完备系,从而存在$\lambda_1, \cdots, \lambda_M \in \widehat{G}$,使得$\chi_{\lambda_p}(\exp h)$在$h = 0$点的上述偏导数组成的$M \times M$方阵是非奇异的,于是得到在连续导数意义下或$\mathrm{L}^p$导数意义下的解$a_1(x), \cdots, a_M(x)$,使得对于$0 \leqslant |m| \leqslant k$,恒有

$$\left(\left(\frac{\partial}{\partial h}\right)^m (\Pi_1 f_x)\right)(\exp 0)$$
$$= \left(\left(\frac{\partial}{\partial h}\right)^m \sum_{p=1}^{M} a_p(x) \chi_{\lambda_p}(\exp \cdot)\right)(\exp 0)$$

成立.

记

$$\Psi_x(y) = \sum_{p=1}^{M} a_p(x) \chi_{\lambda_p}(y),$$

当$t = 1/N$时,则记$S_t^{\alpha,\delta}(f,x)$和$K_t^{\alpha,\delta}(x)$为$S_N^{\alpha,\delta}(f,x)$和$K_N^{\alpha,\delta}(x)$.

并取 $a>k+2,\delta>n+k+2$，则有

$$
\begin{aligned}
& S_N^{a,\delta}(f,x)-f(x) \\
& =\int_G K_N^{a,\delta}(y)f(xy^{-1})\mathrm{d}y-f(x) \\
& =\int_G K_N^{a,\delta}(y)(\Pi_1 f_x)(y^{-1})\mathrm{d}y-f(x) \\
& =\int_G K_N^{a,\delta}(y)\left((\Pi_1 f_x)(y^{-1})-\Psi_x(y^{-1})\right)\mathrm{d}y \\
& \quad+\sum_{p=1}^{M}\left((1-|\lambda_p+\delta|^a/N^a)_+^\delta-1\right)a_p(x)d_{\lambda p} \\
& =I_1+I_2.
\end{aligned}
$$

显然有

$$
\|I_2\|_\infty \leqslant A\|f\|_k N^{-a},
$$

$$
\|I_2\|_p \leqslant A\|f\|_{p,k} N^{-a}.
$$

再由 Poisson 求和公式可得

$$
\begin{aligned}
I_1= A_G N^n\int_{\mathfrak{h}}\varphi_x(-h)D(-h)P(h) \\
\times W_{\frac{1}{2}n-1}^{a,\delta}(N|h|)\mathrm{d}h,
\end{aligned}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
\varphi_x(-h)= (\Pi_1 f_x)(\exp(-h)) \\
-\Psi_x(\exp(-h)).
\end{aligned}
$$

由定理2.26及其证明可得到因为 $a>k+2,\delta>n+k+2$，从而

$$
\left|W_{\frac{1}{2}n-1}^{a,\delta}(|h|)\right|\leqslant A(1+|h|)^{-n-k-2},
$$

取 $b_0>0$，使当 $|h|\leqslant b_0$ 时，

$$
0<c_0<|D_0(h)|\leqslant 1.
$$

记

$$
\begin{aligned}
I_1 &=\int_{|h|>b_0}+\int_{|h|\leqslant b_0} \\
&=I_{11}+I_{12},
\end{aligned}
$$

则可得

$$|I_{11}| \leqslant AN^{-k-2}\int_{|h|>b_0} |\varphi_x(-h)D(-h)P(h)| \times |h|^{-n-k-2}\mathrm{d}h,$$

从而可得当 $f\in C^{k,\omega}(G)$时，

$$|I_{11}| \leqslant AN^{-k-2};$$

当 $f\in \mathrm{L}^{k,\omega}(G)$时，$I_{11}=I_{11}(x)$作为 G 上的函数有

$$\|I_{11}(\cdot)\|_p \leqslant AN^{-k-2}.$$

对 I_{12}的估计，当$|h|\leqslant b_0$时，可得

$$|P(h)D(-h)| \leqslant c_0^{-1}|D(h)|^2 \leqslant P(h)^2 c_0^{-1},$$

$$\mathrm{i}^m P(h)D(-h) \geqslant |D(h)|^2 \geqslant c_0^2 P(h)^2,$$

当$|h|\leqslant b_0<1$时，可得

$$|\varphi_x(h)| \leqslant A\|f\|_{k,\omega}|h|^k\omega(|h|).$$

由此可得

$$\begin{aligned}|I_{12}| &\leqslant AN^n\int_{|h|\leqslant b_0} \|f\|_{k,\omega}|h|^{2m+k}\omega(|h|) \times (1+N|h|)^{-n-k-2}\mathrm{d}h \\ &\leqslant A\|f\|_{k,\omega}\int_{|h|\leqslant Nb_0} N^{-k}\omega(|h|/N) \times (1+|h|)^{-r-2}\mathrm{d}h \\ &\leqslant A\|f\|_{k,\omega}N^{-k}\omega(1/N).\end{aligned}$$

当 $f\in \mathrm{L}_p^{k,\omega}(G)$时，记 $I_{12}=I_{12}(x)$，则可得到上面的证明在 L^p 模意义下成立，即

$$\|I_{12}(\cdot)\|_p \leqslant A\int_{|h|\leqslant b_0} N^n\|\varphi.(-h)\|_p \cdot |h|^{2m} \cdot |W^{\alpha,\delta}_{\frac{1}{2}n-1}(N|h|)|\mathrm{d}h,$$

其中

$$\|\varphi.(-h)\|_p \leqslant \|f\|_{p,k,\omega}|h|^k\omega(|h|).$$

同样可得

$$\|I_{12}(\cdot)\|_p \leqslant A\|f\|_{p,k,\omega}N^{-k}\omega(1/N).$$

因为 $S_N^{\alpha,\delta}(f,x)$ 是 N 阶三角多项式，从而证明了定理2.27.

在经典的情形，定理2.28和2.29的证明归结为 Bernstein 不等式的证明. 对紧致李群 G，同样有相应的 Bernstein 不等式. ▌

定理 2.30 设 T_N 为(2.142)式定义的紧致李群 G 上的 N 阶三角多项式空间，$X_1,\cdots,X_n$ 是 G 的李代数 $\mathfrak{g}$ 的一组标准正交基，$\tilde{X}_1,\cdots,\tilde{X}_n$ 是 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 对应的 G 上的左不变向量场，则对任意的 $T(x)\in T_N$，有下式成立：

$$|(\tilde{X}_jT)(x)|\leqslant N\|T(\cdot)\|_\infty,$$
$$|T(x)-T(y)|\leqslant N\mathrm{d}(x,y)\|T(\cdot)\|_\infty.$$

其中 $\mathrm{d}(x,y)$ 是 G 中的点 x、y 间的 Riemann 距离.

证明 设

$$T(x)=\sum_{|\lambda+\delta|\leqslant N}\mathrm{Tr}(C_\lambda\rho_\lambda(x)),$$

则有

$$(\tilde{X}_jT)(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}T(x\exp tX_j)\bigg|_{t=0}.$$

设

$$\exp tX_j=y\exp th_jy^{-1},\ h_j\in\mathfrak{h},$$

则 $|h_j|=1$，从而可得

$$\begin{aligned}T(x\exp tX_j)&=T(xy\exp th_jy^{-1})\\&=\sum_{|\lambda+\delta|\leqslant N}\mathrm{Tr}(\rho_\lambda(y^{-1})C_\lambda\rho_\lambda(xy)\\&\quad\times\rho_\lambda(\exp th_j)).\end{aligned}\tag{2.143}$$

因为 $\rho_\lambda(\exp th_j)$ 是对角阵，它在对角线上的函数是 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega,th_j)}$，适合 $|\omega|\leqslant|\lambda|\leqslant|\lambda+\delta|$，它作为 t 的三角函数则有

$$|(\omega,h_j)|\leqslant|\omega|\leqslant|\lambda|\leqslant|\lambda+\delta|,$$

且对任意的 t 均有下式成立：

$$|T(x\exp tX_j)|\leqslant\|T\|_\infty.$$

从而(2.143)式看作 t 的函数是 t 的指数型三角多项式，其最高阶

是

$$|(\lambda,h_j)|\leqslant|\lambda|\leqslant|\lambda+\delta|\leqslant N.$$

由经典的 Bernstein 定理，则有

$$\begin{aligned}|\tilde{X}_jT(x)|&\leqslant\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}T(x\exp tX_j)|_{t=0}\right|\\&\leqslant\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}T(xy\exp th_jy^{-1})|_{t=0}\right|\\&\leqslant N\sup_t|T(xy\exp th_jy^{-1})|\\&\leqslant N\|T\|_\infty,\end{aligned}$$

再由 $x\neq y$ 时，令

$$x^{-1}y=\exp t_0X,\ |X|=1,\ t_0>0,$$

则有

$$\mathrm{d}(x,y)=t_0.$$

从而有

$$T(y)-T(x)=\int_0^{t_0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}T(x\exp tX)\mathrm{d}t.$$

利用上面已得的结果，当 $T\in T_N$ 时，就有

$$\begin{aligned}|T(x)-T(y)|&\leqslant\left|\int_0^{t_0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}T(x\exp tX)\mathrm{d}t\right|\\&\leqslant t_0N\|T\|_\infty\\&=N\mathrm{d}(x,y)\|T(\cdot)\|_\infty.\end{aligned}$$ ▌

有了定理2.30，定理2.28与2.29的证明就同经典的情形一样了.

2.7.3　广义的 Abel—龚平均

现将(1.134)式的广义的 Abel—龚核记为

$$A_t^b(x)=\sum_{\lambda\in\hat{G}}\mathrm{e}^{-t^b|\lambda+\delta|^b}d_\lambda\chi_\lambda(x),\tag{2.144}$$

它与(1.134)式的差别仅仅是参数的变换，并不影响函数的性质，它的 Poisson 求和公式是

$$A_t^b(\exp h)=B_G\Pi\left\{t^{-n}D_0(\cdot)^{-1}W^{A,b}_{\frac{1}{2}n-1}(t^{-1}|\cdot|)\right\}(\exp h).\tag{2.145}$$

由引理2.11和定理2.26的证明过程，即可得如下定理：

定理 2.31 广义 Abel—龚核 $A_t^b(x)$ 的 Poisson 求和公式(2.145)中的函数 $W^{A,b}_{\frac{1}{2}n-1}(|h|)$ 适合

$$\left|W^{A,b}_{\frac{1}{2}n-1}(|h|)\right| \leqslant A_0(1+|h|)^{-n-\varepsilon},$$

$$\left|\left(\left(\frac{\partial}{\partial h}\right)^m W^{A,b}_{\frac{1}{2}n-1}\right)(h)\right| \leqslant A_m(1+|h|)^{-n-\varepsilon-|m|}$$

对任意的 $0<\varepsilon<\mathrm{Re}b$ 和 $\mathfrak{h}$ 中非负整格点 $m=(m_1,\cdots,m_r)$ 成立，其中 $|m|=m_1+\cdots+m_r$，$r=\dim\mathfrak{h}$，A_0，A_m 是不依赖于 $h\in\mathfrak{h}$ 的正常数.

定理2.31的证明与定理2.26的证明相似，在此从略.

注记 定理2.27至定理2.29对于紧致齐性空间，特别对于 R^n 中的单位球面成立. 这只要应用 § 1.5的引理1.16后面的，当 $M=G/K$ 时，M 上函数与 G 上函数的对应关系，就立即可得到紧致齐性空间上的对应定理.

第 3 章

紧致齐性空间上的调和分析

第 2 章侧重讨论了紧致李群上的调和分析中若干重要的课题，在本章中将围绕 H^p 空间的理论，侧重讨论紧致齐性空间上的调和分析. 因为紧致李群、欧氏空间中的球面等等都是特殊的紧致齐性空间，所以本章中所有的定义和定理，当取 M 为紧致李群时，也就给出了紧致李群上相应的定义和定理，而当取 M 为欧氏空间中的单位球面时，也就给出了球面上调和分析中相应的定义与定理.

§ 3.1　$H^p(M)$空间与 Poisson 积分

3.1.1　$H^p(M)$空间的定义

设 M 为紧致齐性空间，$P_t(m)$是 M 上的 Poisson 核，它由(1.147)式给出. 对 m、$n\in M$，记 $d(m,n)$为 M 中两点 m 和 n 之间的 Riemann 距离，即连接 m 和 n 两点的最短测地线的弧长. 再记 $S'(M)$是 $C^\infty(M)$上的广义函数空间. 因为 $t>0$ 时 $P_t(m)$是 M 上的 C^∞ 函数，因此，对任一 $f\in S'(M)$和 $t>0$，$P_t*f(m)$也是 M 上的 C^∞ 函数，定义 $f\in S'(M)$的 Poisson 积分 $P_t*f(m)$的几个极大算子为

$$P_\nabla^*(f)(m)=\sup_{d(n,m)<t}\{|P_t*f(n)|\},\tag{3.1}$$

$$P_+^*(f)(m)=\sup_{t>0}\{|P_t*f(m)|\},\tag{3.2}$$

$$P_{+,\varepsilon}^*(f)(m)=\sup_{0<t<\varepsilon}\{|P_t*f(n)|\}.\tag{3.3}$$

对 $0<p<+\infty$，定义 $H^p(M)$ 空间为

$$H^p(M)=\{f\in S'(M),P_\nabla^*(f)\in L^p(M)\}. \qquad (3.4)$$

3.1.2 原子 Hardy 空间 $H_a^{p,q,s}(M)$

这里在更一般的情形下来定义原子 Hardy 空间.

设 M 为一个连通的紧致 Riemann 流形，$m\in M$ 是 M 中的一点，M_m 是 M 关于 m 点割迹的内部，Ω_m 是 M 关于 m 点的切割迹的内部. 对 m、$n\in M$，$d(m,n)$是 m 和 n 两点间的 Riemann 距离.

记 $T_m(M)$是 $m\in M$ 点的切空间，r_m 是 Ω_m 中包含的以 0 为中心的最大开球的半径，$\exp_m:T_m(M)\to M$ 是指数映射，$M_m=\exp_m\Omega_m$，$\phi_m(n)$是 M 上关于 m 点径向的 C^∞ 函数：

$$\phi_m(n)=\begin{cases}1, & 若\ d(m,n)\leqslant\frac{1}{2}r_m;\\ 0, & 若\ d(m,n)\geqslant\frac{3}{4}r_m;\\ 0<\phi_m(n)<1, & 若\ \frac{1}{2}r_m<d(m,n)<\frac{3}{4}r_m.\end{cases}$$

再设 $X_{1,m},\cdots,X_{l,m}$是 $T_m(M)$的一组标准正交基，

$$X=x_{1,m},X_{1,m}+\cdots+x_{l,m},X_{l,m}$$

是 $X\in T_m(M)$的坐标表示，$Q_{s,m}$是 $x_{1,m},\cdots,x_{l,m}$的次数$\leqslant s$ 次的复系数多项式全体所成的复线性空间，对 $q(X)\in Q_{s,m}$，有

$$P_m(n)=\begin{cases}\phi_m(n)q(X), & 若\ n=\exp_m X,X\in\Omega_m;\\ 0, & 若\ n\in M\backslash\Omega_m.\end{cases}$$

$Q_{s,m}(M)=\{$所有的 $P_m(n)$，$P_m(n)$由上式定义$\}$. 显然 $Q_{s,m}(M)$与 $Q_{s,m}$是线性同构的.

记
$$B(n,r)=\{m\in M,d(m,n)<r\}. \qquad (3.5)$$

因为 M 为紧致的，可选有限个点 $m_0,m_1,\cdots,m_b\in M$，使得

$$\left\{B(m_k,\frac{1}{2}r_{m_k}),k=0,1,\cdots,b\right\}$$

覆盖了 M，且对任一 $m\in M$，必存在 $0\leqslant k\leqslant b$，使得

$$B\left(m,\frac{1}{10}r_m\right)\subset B\left(m_k,\frac{1}{2}r_{m_k}\right).$$

再置线性和：

$$Q_s(M) = Q_{s,m_0}(M) + \cdots + Q_{s,m_b}(M). \qquad (3.6)$$

当 M 为紧致齐性空间时，取 $m_0=o$，o 为 $M=G/K$ 时的 G 的幺元的傍系，则任一 $Q_{s,m}(M)$ 均可由 $Q_{s,m_0}(M)$ 经 M 上等度量变换而得到，且 $r_m=r_0$，对任意的 $m\in M$ 成立.

对实数 x，记 $[x]$ 为不超过 x 的最大整数，再记 $|B(n,r)|$ 为测地球 $B(n,r)$ 的体积. 则可给出原子 Hardy 空间的一个定义如下：

定义 3.1　设 M 为 l 维的紧致 Riemann 流形，$0<p\leqslant 1\leqslant q\leqslant +\infty$ 且 $p\neq q$，$s\geqslant\left[l\left(\frac{1}{p}-1\right)\right]$ 为非负整数，若 M 上的函数 $a(m)$ 适合：

(1) $\mathrm{supp}\,a(\cdot)\subset B(n,r)$；

(2) $\|a(\cdot)\|_q\leqslant|B(n,r)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}$；

(3) 对一切 $\pi(m)\in Q_s(M)$，有

$$\int_M a(m)\pi(m)\mathrm{d}m = 0$$

成立. 则称 $a(m)$ 为一个中心为 n 的 (p,q,s) 原子.

若 $a(\cdot)\in C^\infty(M)$，且 $\|a(\cdot)\|_\infty\leqslant 1$，则称 $a(m)$ 为一个例外原子.

定义 3.2　设 $f\in S'(M)$，且有

$$f \overset{S'}{=\!=} \sum_k \lambda_k a_k(\cdot) \qquad (3.7)$$

成立. 其中 λ_k 是复数，适合

$$\sum_k |\lambda_k|^p < +\infty, \qquad (3.8)$$

$a_k(m)$ 或是 (p,q,s) 原子或是例外原子，再置

$$\|f\|_{H_a^{p,q,s}} \equiv \inf\left\{\left(\sum_k |\lambda_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right\}, \qquad (3.9)$$

其中下确界是对一切可能的使(3.8)式成立的 f 的分解式(3.7)式而取的. 定义原子 Hardy 空间为

$$H_a^{p,q,s}(M) = \{f\in S'(M),\ \|f\|_{H_a^{p,q,s}} < +\infty\}. \quad (3.10)$$

3.1.3 Poisson 核的渐近展开

直接讨论紧致齐性空间 M 上的 Poisson 核 $P_t(m)$：

$$P_t(m) = \sum_{\lambda\in\hat{M}} e^{-t\mu_\lambda^{\frac{1}{2}}} d_\lambda \chi_\lambda(m)$$

和 Poisson 积分 $P_t * f(m)$往往是很困难的. 但是 Poisson 核 $P_t(m)$和 § 1.6 节中(1.144)式定义的 Abel—龚核 $A_t(m)$：

$$A_t(m) = \sum_{\lambda\in\hat{M}} e^{-t|\lambda+\delta|} d_\lambda \chi_\lambda(m)$$

有着密切的联系.

当 M 是环群时，$\delta=0$，则 $P_t(m)=A_t(m)$，而当 M 不是环群即 $\delta\neq 0$ 时，$P_t(m)$则可用 $A_t(m)$作渐近展开.

定理 3.1 设 $M=G/K$ 为紧致齐性空间，特别，若 $M=G$ 为紧致李群，$P_t(m)$和 $A_t(m)$分别是 M 上的 Poisson 核和 Abel—龚核，$J_k(m)$和 $I_k(m)$分别是 M 上 k 阶 Bessel 位势算子 J_k 和 k 阶 Riesz 位势算子 I_k 的核函数，则有：

(1) $P_t(m)$具有如下的渐近表示，对任意的自然数 N，有

$$P_t(m)= A_t(m) + \sum_{k=1}^{N} Q_k(t) J_k(\cdot) * A_t(m) + R_N(t;m) * A_t(m),$$

其中 $Q_k(t)$是 t 的常数项为零的 k 次多项式，它的系数仅依赖于 $|\delta|$和 k，$R_N(t,m)$是 M 上具有直到 $N-l$ 阶的各阶连续偏导数的连续函数，且对任意的正数 A_0，当 $0<t\leqslant A_0$ 时，$R_N(t,m)$的上述各阶偏导数关于 t 是一致有界的.

(2) $A_t(m)$具有如下的渐近表示：

$$A_t(m)= P_t(m) + \sum_{k=1}^{N} \tilde{Q}_k(t) I_k(\cdot) * P_t(m) + \tilde{R}_N(t,m) * P_t(m),$$

其中 $\tilde{Q}_k(t)$、$\tilde{R}_N(t,m)$分别与 $Q_k(t)$、$R_N(t,m)$具有相同的函数性质.

证明 设

$$(1-t)^{\frac{1}{2}}=1+\sum_{k=1}^{\infty}c_k t^k$$

是$(1-t)^{\frac{1}{2}}$在 $t=0$ 点展开的幂级数，显然有

$$c_k<0\quad(k=1,2,\cdots)\text{ 及}\sum_{k=1}^{\infty}c_k=-1.$$

由第1章的命题1.20和命题1.21可得到当 $\lambda\neq0$ 时，有

$$\begin{aligned}\mu_\lambda^{\frac{1}{2}}&=(|\lambda+\delta|^2-|\delta|^2)^{\frac{1}{2}}\\&=|\lambda+\delta|(1-|\delta|^2/|\lambda+\delta|^2)^{\frac{1}{2}}\\&=|\lambda+\delta|\left(1+\sum_{k=1}^{\infty}c_k|\delta|^{2k}/|\lambda+\delta|^{2k}\right)\\&=|\lambda+\delta|+\sum_{k=1}^{\infty}c_k|\delta|^{2k}/|\lambda+\delta|^{2k-1},\end{aligned}$$

由上式可得

$$\mathrm{e}^{-t\mu_\lambda^{\frac{1}{2}}}=\mathrm{e}^{-t|\lambda+\delta|}\left(1+\sum_{k=1}^{\infty}Q_k(t)|\lambda+\delta|^{-k}\right),$$

其中上式等号右面括号中的级数看作 $y=|\lambda+\delta|^{-1}$的幂级数，可由下式确定：

$$\begin{aligned}&1+\sum_{k=1}^{\infty}Q_k(t)|\lambda+\delta|^{-k}\\&\quad=1+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r!}\left(\sum_{s=1}^{\infty}tc_s|\delta|^{2s}/|\lambda+\delta|^{2s-1}\right).\qquad(3.11)\end{aligned}$$

由此易得 $Q_k(t)$适合定理，且当 $0<t\leqslant A_0$ 和 $0\neq\lambda\in\widehat{M}$时，上式关于 t 和 λ 绝对一致收敛. 因为

$$J_k(\cdot)*A_t(m)=\sum_{0\neq\lambda\in\widehat{M}}|\lambda+\delta|^{-k}\mathrm{e}^{-t|\lambda+\delta|}d_\lambda\chi_\lambda(m),$$

再置

$$R_N(t,m)=1-\mathrm{e}^{-t|\delta|}+\sum_{0\neq\lambda\in\widehat{M}}a_{\lambda,N}d_\lambda\chi_\lambda(m),$$

其中

$$a_{\lambda,N}=\sum_{k=N+1}^{\infty}Q_k(t)|\lambda+\delta|^{-k}.$$

由 Bessel 位势核函数的性质可知，$J_k(m)$具有 $k-l-1$ 阶的各阶连续偏导数. 再令 $n=\dim G$，则当 $k\geqslant n+1$ 时，有

$$\Big|\sum_{0\neq\lambda\in\hat{M}}|\lambda+\delta|^{-k}d_\lambda\chi_\lambda(m)\Big|$$
$$\leqslant\sum_{0\neq\lambda\in\hat{M}}|\lambda+\delta|^{-k}d_\lambda^2<+\infty.$$

这就可得到 $R_N(t,m)$具有直到 $N-l$ 阶的各阶连续偏导数，且对 $0\leqslant k\leqslant N-l$，$R_N(t,m)$的某个 k 阶导数 $R^{(k)}(t,m)$的绝对值适合

$$\|R_N^{(k)}(t,\cdot)\|_\infty\leqslant\sum_{s=1}^{n}Q_{N+s}(t)\|J_{N+s}^{(k)}(\cdot)\|_\infty$$
$$+A_k\sum_{0\neq\lambda\in\hat{M}}b_{\lambda,N}(t)d_\lambda^2,$$

其中

$$b_{\lambda,N}(t)=\sum_{s=N+n+1}^{\infty}Q_s(t)|\lambda+\delta|^{k-s},$$

A_k 是仅依赖于 M、N、k 的正常数. 则由(3.11)式易得当 $0<t\leqslant A_0$ 时，$\|R_N^{(k)}(t,\cdot)\|_\infty$关于 t 一致有界，因为将

$$\sum_{s=1}^{\infty}|c_s|\cdot|\delta|^{2s}y^{2s-1}$$

看作 y 的幂级数的收敛半径是$|\delta|^{-1}$，而当 $\lambda\neq0$ 时，存在仅依赖于 M 的正数 a_0，使得

$$|\lambda+\delta|\geqslant a_0+|\delta|.$$

从而证明了定理 3.1 中的(1).

再由 $\mu_\lambda>|\delta|^2$ 时，有

$$|\lambda+\delta|=(\mu_\lambda+|\delta|^2)^{\frac{1}{2}}$$
$$=\mu_\lambda^{\frac{1}{2}}\Big(1+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^kc_k|\delta|^{2k}/\mu_\lambda^k\Big)$$

$$= \mu_\lambda^{\frac{1}{2}} + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k c_k |\delta|^{2k}/\mu_\lambda^{k-\frac{1}{2}}.$$

因为 $\mu_\lambda \leqslant |\delta|^2$ 的 $\lambda \in \widehat{M}$ 只有有限项，以及当 $\mu_\lambda > |\delta|^2$ 时，有

$$e^{-t|\lambda+\delta|} = e^{-t\mu_\lambda^{\frac{1}{2}}}\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty}\widetilde{Q}_k(t)\mu_\lambda^{-\frac{1}{2}k}\right),$$

其中

$$1 + \sum_{k=1}^{\infty}\widetilde{Q}_k(t)\mu_\lambda^{-\frac{1}{2}k}$$

$$= 1 + \sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r!}\left(\sum_{s=1}^{\infty}t(-1)^s c_s |\delta|^{2s}/\mu_\lambda^{s-\frac{1}{2}}\right)^r, \qquad (3.12)$$

再由

$$I_k(\cdot) * P_t(m) = \sum_{0\neq\lambda\in\widehat{M}} \mu_\lambda^{-\frac{1}{2}k} e^{-t\mu_\lambda^{\frac{1}{2}}} d_\lambda \chi_\lambda(m)$$

以及置

$$\widetilde{R}_N(t,m) = \sum_{\mu_\lambda \leqslant |\delta|^2}\left(e^{-t|\lambda+\delta|} - e^{-t\mu_\lambda^{\frac{1}{2}}}\right)d_\lambda\chi_\lambda(m)$$

$$+ (-1)\sum_{k=1}^{N}\widetilde{Q}_k(t)\sum_{0<\mu_\lambda\leqslant|\delta|^2}\mu_\lambda^{-\frac{1}{2}k}d_\lambda\chi_\lambda(m)$$

$$+ \sum_{\mu_\lambda > |\delta|^2}\widetilde{a}_{\lambda,N}(t)d_\lambda\chi_\lambda(m),$$

其中

$$\widetilde{a}_{\lambda,N}(t) = \sum_{k=N+1}^{\infty}\widetilde{Q}_k(t)\mu_\lambda^{-\frac{1}{2}k}.$$

易见 $\widetilde{Q}_k(t)$ 与 $Q_k(t)$，$\widetilde{R}_N(t,m)$ 与 $R_N(t,m)$ 具有相同的性质，从而证明了定理 3.1 中的(2). 于是定理 3.1 得证. ∎

3.1.4 非切向收敛

Poisson 积分 $P_t * f(m)$ 可以看作是定义在流形 $R\times M$ 的上半空间 $R_+\times M=(0,+\infty)\times M$ 上的函数.

对 $m\in M$ 及 $\alpha>0$，令

$$\Gamma_\alpha(m) = \{(t,n)\in R_+\times M, \mathrm{d}(n,m) < \alpha t\}, \qquad (3.13)$$

并称 $\Gamma_\alpha(m)$ 为顶点在 m，锥度为 α 的开锥.

若存在常数 a，对每个 $\alpha>0$，当 (t,n) 在锥 $\Gamma_\alpha(m)$ 中趋于 $(0,m)$ 时，恒有

$$\lim_{(t,n)\to(0,m)} P_t * f(n) = a \tag{3.14}$$

成立. 就称 Poisson 积分 $P_t * f$ 在 $m\in M$ 点有非切向极限 a.

类似地可定义 Abel－龚积分 $A_t * f$，以及第 2 章定理 2.5 中核函数 $K_t^\epsilon(x)$ 定义的求和 $K_t^\epsilon * f$ 的非切向收敛.

由定理 3.1，对 Poisson 积分 $P_t * f, f\in L^p(G), p\geqslant 1$ 的非切向收敛的研究，只须研究 Abel－龚积分的非切向收敛.

记 $B(m,t)$ 为 M 中以 m 为中心、半径为 t 的测地球，定义 Hardy-Littlwood 极大函数为

$$\mathrm{HL}(f)(m) = \sup_{t>0} \frac{1}{|B(m,t)|}\int_{B(m,t)} |f(n)|\mathrm{d}n, \tag{3.15}$$

其中 $|B(m,t)|$ 表示测地球 $B(m,t)$ 的体积.

定理3.2 设 $f\in L^p(M), p\geqslant 1$，则 f 的 Abel－龚积分 $A_t * f(m)$ 几乎处处非切向收敛于 $f(m)$. 进一步，记 $A_t * f$ 的非切向极大函数 $A_{\alpha\nabla}^*(f)$ 为

$$A_{\alpha\nabla}^*(f)(m) = \sup_{(t,n)\in\Gamma_\alpha(m)} \{|A_t * f(n)|\},$$

则存在仅依赖于 M 和 $\alpha>0$ 的正数 C_α，使下式成立：

$$A_{\alpha\nabla}^*(f)(m) \leqslant C_\alpha \mathrm{HL}(f)(m).$$

证明 由 §1.6，Abel－龚核 $A_t(m)$ 为

$$A_t(m) = \sum_{\lambda\in\hat{M}} \mathrm{e}^{-t|\lambda+\delta|} d_\lambda \chi_\lambda(m).$$

设 $a_0>0$，使得 $B(o,32a_0)$ 是包含于 M 中的最大开测地球，则当 $(t,n)\in\Gamma_\alpha(m)$ 时，存在仅依赖于 M 和 $\alpha>0$，而不依赖于 $m\in M$ 的正数 $b_\alpha\leqslant 1/2$，使当 $0<t\leqslant b_\alpha$ 时，$n\in B(m,a_0)$. 由此可得，当 $t\geqslant b_\alpha$ 时，存在仅依赖于 M 和 α 的正数 $C_{1,\alpha}$，使

$$|A_t(m)| \leqslant \sum_{\lambda\in\hat{M}} \mathrm{e}^{-b_\alpha|\lambda+\delta|} d_\lambda^2 \leqslant C_{1,\alpha},\ m\in M.$$

从而得到当 $(t,n)\in\Gamma_\alpha(m)$，且 $t\geqslant b_\alpha$ 时，有

$$|A_t * f(n)| \leqslant C_{1,\alpha}\|f\|_1.$$

从而得到

$$A_{a\nabla}^{*}f(m) \leqslant C_{1,a}\|f\|_{1}+\sup_{\substack{(t,n)\in\Gamma_a(m)\\0<t\leqslant b_a}}\{|A_t*f(n)|\}. \qquad (3.16)$$

记 ∇为 M 上的梯度算子，则有

$$|A_t*f(n)| \leqslant |A_t*f(m)|+|A_t*f(n)-A_t*f(m)| \leqslant |A_t*f(m)|+\mathrm{d}(n,m)\|\nabla(A_t*f)(\xi)\|, \qquad (3.17)$$

其中 ξ 是连接 n 和 m 的最短测地线上的某一点，$\nabla(A_t*f)$是 $l=\dim M$ 维欧氏空间中的向量，$\|\nabla(A_t*f)\|$ 是该向量的欧氏范数.

为估计 $\|\nabla(A_t*f)(\xi)\|$，先讨论 $\mathfrak{h}$ 上的函数

$$B_t(h)=\sum_{a\in\Lambda}\Phi_t^0(a+h)D_0(a+h)^{-1}, \qquad (3.18)$$

其中 $M,G,K,\mathfrak{g},\mathfrak{k}$，同第1章的§1.3节，$\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 子代数，$D_0(h)$由(2.18)式给出，$n=\dim G$，

$$\Phi_t^0(h)=B_1t/(t^2+|h|^2)^{\frac{1}{2}(n+1)}. \qquad (3.19)$$

因为 Λ 是格点集，$\Phi_t^0(h)$和 $D_0(h)$是 Weyl 群不变的函数，从而 $B_t(h)$也是 Weyl 群不变的函数，且适合

$$B_t(a+h)=B_t(h),\ a\in\Lambda. \qquad (3.20)$$

这就表明了 $B_t(h)$可以看作 G 上的中心函数在 G 的 Cartan 子群 $T=\exp\mathfrak{h}$ 上的限制，它由 $h\in Q$ 上的值完全确定，这里 Q 看作 $\mathfrak{h}$ 中以原点为中心的闭平行多面体，值得 $T=\exp Q$，且限制在 Q 的内部时指数映射是 Q 的内部到 T 的一个稠密开集上的微分同胚.

设 $\mathfrak{g}=\mathfrak{h}_0\oplus\mathfrak{g}'$，其中 $\mathfrak{h}_0$ 是 $\mathfrak{g}$ 的中心，$\mathfrak{g}'$是一个半单紧致李代数，从而有 $\mathfrak{h}=\mathfrak{h}_0\oplus\mathfrak{h}'$，其中 $\mathfrak{h}'$是 $\mathfrak{g}'$的一个 Cartan 子代数.

由引理 1.1，李群 G 的指数映射的微分是

$$\mathrm{d}\exp X=\mathrm{d}(L\exp X)\mathrm{e}\circ\left(\frac{I-\mathrm{e}^{-\mathrm{ad}X}}{\mathrm{ad}X}\right),X\in\mathfrak{g}.$$

当 G 是连通紧致李群时，则有

$$|D_0(h)|^2=\det\left(\frac{I-\mathrm{e}^{-\mathrm{ad}X}}{\mathrm{ad}X}\right),$$

其中 $X\in\mathfrak{g}$，$X=Ady(h)$，$y\in G$，$D_0(h)$由(2.18)式给出.

记 $G'=\exp\mathfrak{g}'$是连通紧致李群 G 的半单纯子李群，$Z(G)$与 $Z(G')$分别表示 G 和 G'的中心，当 $x\in Z(G)$时，Adx 是单位阵，从而设 $\exp\eta\in Z(G)$，就有

$$(\alpha,\eta)=2k\pi, k \text{ 为整数}, \alpha\in\Sigma.$$

特别是若存在 $h\in Q$，使 $D_0(h)=0$ 时，则 $Z(G')$非平凡，且存在 $\exp\eta\in Z(G')$，使得 $h=\eta+h'$，$h'\in Q$，$D_0(h')\neq 0$.

设 $h_0\in\mathfrak{h}$，是 $D(h)$的零点，即 $D(h_0)=0$ 成立. 令

$$\Sigma(h_0)=\{\alpha\in\Sigma,(\alpha,h_0)=2k\pi,k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots\}.$$

记 r 是 Σ 的秩，s 是 $\Sigma(h_0)$的秩，则 $1\leqslant s\leqslant r$，并称 h_0 是 $D(h)$的秩为 s 的零点.

$\Sigma(h_0)$在 $\mathfrak{h}$ 中张成的 s 维子空间记为 $\mathfrak{h}(h_0)$，并记$(\mathfrak{h}(h_0))^{\perp}$为 $\mathfrak{h}(h_0)$在 $\mathfrak{h}$ 中的正交补. 由 Σ 的根系性质和 $\Sigma(h_0)$的定义，容易验证$\Sigma(h_0)$是 $\mathfrak{h}(h_0)$中的 σ 系，它又是 $\mathfrak{g}$ 的某个紧致子代数 $\mathfrak{g}(h_0)$的根系. 记 W 是 $\mathfrak{g}$ 的 Weyl 群，$W(h_0)$是关于根 $\alpha\in\Sigma(h_0)$的反射生成的 W 的子群，因此它在 $\mathfrak{g}(h_0)$上的限制就是 $\mathfrak{g}(h_0)$的 Weyl 群，并且对 $\sigma\in W(h_0)$，看作 W 中的元时，它的行列式 $\det\sigma$ 等于 σ 在 $\mathfrak{g}(h_0)$上的限制时作为 $\mathfrak{g}(h_0)$的 Weyl 群的元时的行列式的值. 因此，若记

$$\Sigma^+(h_0)=\Sigma(h_0)\cap\Sigma^+,$$
$$\Sigma^+_{h_0}=\Sigma^+\setminus\Sigma^+(h_0),$$

则对一切的 $h\in\mathfrak{h}$ 和 $\sigma\in W(h_0)$恒有

$$P_1(\sigma(h))=P_1(h),\ \sigma\in W(h_0),\ h\in\mathfrak{h}. \tag{3.21}$$

其中

$$P_1(h)=\prod_{\alpha\in\Sigma^+_{h_0}}(\alpha,h),$$

$$P_2(h)=\sum_{\alpha\in\Sigma^+(h_0)}(\alpha,h). \tag{3.22}$$

由第 1 章 §1.4，设 $\chi(G)$是 G 的不可约酉表示的全体权的集合，则 $a\in$ 格点集 Λ 的充分必要条件是

$$(\lambda,a)=2k\pi,k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots$$

对一切 $\lambda\in\chi(G)$ 成立. 另一方面,由表示理论又可得:若 $\lambda\in\chi(G)$,

$$2(\lambda,\alpha)/(\alpha,\alpha)=\text{整数},\alpha\in\Sigma,$$

对一切 $\alpha\in\Sigma,\lambda\in\chi(G)$ 均成立.

将 $\alpha\in\Sigma$ 看作 $\mathfrak{h}$ 中的向量,即看作 $\alpha=h_\alpha$(h_α 是 α 在 $\mathfrak{h}$ 中的嵌入),则 $\mathfrak{h}$ 中由 α 产生的反射是

$$S_\alpha:h\to h-2(h,\alpha)\alpha/(\alpha,\alpha).$$

而 Weyl 群则可由全体 $S_\alpha,\alpha\in\Sigma^+$ 所生成. 特别是当 $D(h_0)=0$ 时,$W(h_0)$ 则由所有的 $S_\alpha,\alpha\in\Sigma^+(h_0)$ 生成. 因此,当 $h_0\in\mathfrak{h},D(h_0)=0$ 时,对 $\alpha\in\Sigma^+(h_0)$,有

$$h_0-S_\alpha(h_0)=2(h_0,\alpha)\alpha/(\alpha,\alpha),\tag{3.23}$$

从面可得

$$\begin{aligned}(\lambda,h_0-S_\alpha(h_0))&=(h_0,\alpha)2(\lambda,\alpha)/(\alpha,\alpha)\\&=2\pi\text{ 的整数倍}\end{aligned}$$

对一切 $\lambda\in\chi(G)$ 成立,从而 $h_0-S_\alpha(h_0)\in$ 格点集 Λ. 因此对任意的一个 $\sigma\in\Sigma(h_0)$,记

$$\sigma=S_{\alpha_1}S_{\alpha_2}\cdots S_{\alpha_s};\ \alpha_1,\cdots,\alpha_s\in\Sigma^+(h_0),$$

就可用归纳法证明 $h_0-\sigma(h_0)\in\Lambda$ 对一切 $\sigma\in W(h_0)$ 成立.

设 $h_0\in Q$ 是 $D(h)$ 的秩为 $s\geqslant1$ 的零点. 将 $\mathfrak{h}$ 中的点集 $\{h_0+a,a\in\Lambda\}$ 分成等价类,其等价关系是

$$h_0+a\sim h_0+b,\ a,b\in\Lambda$$

的充要条件是:存在 $\sigma\in W(h_0)$,使

$$\sigma(h_0+a)=h_0+b$$

成立.

等价类集合 $\{h_0+a,a\in\Lambda\}/\sim$ 中以 h_0+a 为代表元的等价类记为 $[h_0+a]$,则可选取特征格 Λ 的子集 $\Lambda(h_0)$,使得

$$\{h_0+a,a\in\Lambda\}/\sim=\{[h_0+a],a\in\Lambda(h_0)\}.\tag{3.24}$$

对每个 $a\in\Lambda(h_0)$,记

$$W(a,h_0)=\{\sigma\in W(h_0),\sigma(a+h_0)=a+h_0\},$$

则 $W(a,h_0)$ 是 $W(h_0)$ 的子群,它的阶记为 $|W(a,h_0)|$. 再令 $a(\sigma)$

适合

$$\sigma(a(\sigma) + h_0) = a + h_0, \ \sigma \in W(h_0), \ a \in \Lambda(h_0), \qquad (3.25)$$

则 $a(\sigma) \in \Lambda$.

而当 $h_0 \in Q, D(h_0) \neq 0$ 时，则有

$$\Lambda(h_0) = \Lambda, \ W(h_0) = \{幺元\}.$$

因此对每个 $h_0 \in Q$，(3.18)式可写成

$$B_t(h) = \sum_{a \in \Lambda(h_0)} \sum_{\sigma \in W(h_0)} \frac{\Phi_t^0(a(\sigma) + h) D_0(a(\sigma) + h)^{-1}}{|W(a, h_0)|}. \qquad (3.26)$$

设 $h_0 \in Q, D(h_0) = 0$，则 $h \in \mathfrak{h}$ 有如下的唯一的分解：

$$h = h_0 + y + z, \ z \in \mathfrak{h}(h_0), \ y \in (\mathfrak{h}(h_0))^{\perp}. \qquad (3.27)$$

这时，可将 $D(h)$ 记为 $D(h) = D_1(h) D_2(h)$，

$$D_1(h) = \prod_{\alpha \in \Sigma^+(h_0)} 2i\sin \frac{1}{2}\alpha(h),$$

$$D_2(h) = \prod_{\alpha \in \Sigma^+(h_0)} 2i\sin \frac{1}{2}\alpha(h). \qquad (3.28)$$

由(3.25)式及 $\Phi_t^0(h) D_0(h)$ 均是 Weyl 群 W 不变的，(3.26)变成

$$B_t(h) = \sum_{a \in \Lambda(h_0)} \frac{\varepsilon(a, h_0)}{|W(a, h_0)|} A_t(a + h_0; y, z) D_2(z)^{-1}, \qquad (3.29)$$

其中 $h = h_0 + y + z$ 由(3.27)式给出

$$A_t(a + h_0; y, z) = \sum_{\sigma \in W(h_0)} \det\sigma C_t(a + h_0 + y + \sigma(z)), \qquad (3.30)$$

$$C_t(a + h_0 + y + \sigma(z)) = \Psi_t^0(a + h_0 + y + \sigma(z)) D_1(a + h_0 + y + \sigma(z))^{-1} \qquad (3.31)$$

$$\Psi_t^0(a + h_0 + y + \sigma(z) = \Phi_t^0(a + h_0 + y + \sigma(z)) P(a + h_0 + y + \sigma(z)), \qquad (3.32)$$

而 $\varepsilon(a,h_0)$ 定义如下：首先记

$$F = \{h \in Q, D(h) = 0\}, \tag{3.33}$$

则对 $a\in A, h_0\in F$，$\varepsilon(a,h_0)$ 是 $A\times F$ 上取值为 ± 1 的函数，$\varepsilon(a,h_0)$ 的值由下式确定：

$$D_2(a + h_0 + h) = \varepsilon(a,h_0)D_2(h),\ h \in \mathfrak{h}. \tag{3.34}$$

现在可用(3.29)式来估计 $B_t(h)$，这就需要对(3.29)式中的函数 $A_t(a+h)$ 看作 $h\in\mathfrak{h}$ 的函数，在 $h=h_0$ 点将它展开成幂级数时，对该幂级数的绝对收敛性质进行估计. 首先给出几个引理如下：

引理3.1　记 $\widetilde{B}(h,r)$ 为 $\mathfrak{h}$ 中以 h 为中心、半径为 r 的开球，则对任一 $t>0$ 和任一 $0\neq h_0\in\mathfrak{h}$，$\Phi_t^0(h)$ 在 h_0 点展开成幂级数时，该幂级数必在球 $\widetilde{B}\left(h_0,\frac{1}{4}|h_0|\right)$ 中径向收敛，且在球 $\widetilde{B}\left(h_0,\frac{1}{4q}|h_0|\right)$ 中绝对收敛，其中 $q=\dim\mathfrak{h}$.

证明　对 $X\in\mathfrak{h}$，记 $\boldsymbol{D}_X$ 为关于 X 的方向导数，也即 $\boldsymbol{D}_X$ 定义为：

$$(\boldsymbol{D}_X f)(h) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(h + tX)\bigg|_{t=0}, \tag{3.35}$$

则可将 $\Phi_t^0(h)$ 在 $0\neq h_0$ 点表示成如下的幂级数：

$$\Phi_t^0(h_0 + uX) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}u^k(\boldsymbol{D}_X^k\Phi_t^0)(h_0), \tag{3.36}$$

若对一切 $|uX|<r$，(3.36)式作为 u 的幂级数均收敛，就称 $\Phi_t^0(h)$ 在 $h=h_0$ 点展开的幂级数在球 $\widetilde{B}(h_0,r)$ 中径向收敛.

再记

$$\Phi_t^0(h_0 + W) = \sum_{\alpha\in Z_+^q} a_\alpha W^\alpha,$$

且当 $|W|<r$ 时，$\sum\limits_{\alpha\in Z_+^q}|a_\alpha|\cdot|W^\alpha|$ 收敛，这时称 $\Phi_t^0(h)$ 在 $h=h_0$ 点展开的幂级数在 $\widetilde{B}(h_0,r)$ 中绝对收敛，其中 $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_q)$，

$$a_\alpha = \frac{1}{\alpha!}\left(\left(\frac{\partial}{\partial h}\right)^\alpha\Phi_t^0\right)(h_0),\quad \alpha! = \alpha_1!\alpha_2!\cdots\alpha_q!.$$

设

$$J_k = (t^2 + |h|^2)^{-\frac{1}{2}k}, \quad \Gamma_l^k = \Gamma\left(\frac{1}{2}l + k\right)\Big/\Gamma\left(\frac{1}{2}l\right). \tag{3.37}$$

首先证明,对 $l=0,1,2,\cdots$,当 $|X|=1$ 时,有

$$D_X^k J_{n+2l+1} = \sum_{j=0}^{r(k)} A_{k,l}^j (h,X)^{k-2j} J_{n+2l+1+2k-2j}, \tag{3.38}$$

且系数 $A_{k,l}^j$ 适合以下的估计:

$$\begin{aligned} |A_{k,l}^j| &\leqslant 2^k C_k^j \Gamma_{n+2l+1}^k, \\ C_k^j &= k!/(j!(k-j)!), \end{aligned} \tag{3.39}$$

其中 $r(k)=\left[\frac{1}{2}k\right]$,而 $[x]$ 则表示不超过实数 x 的最大整数.

用归纳法易证(3.38)式为真,所以只需证明(3.39)式的估计亦为真. 仍用归纳法证明:当 $k=0,1,2$ 时,直接计算其导数,易得(3.39)式对一切 $l=0,1,2,\cdots$ 均成立. 现设(3.39)式当 $k=s$ 时对一切 $l=0,1,2,\cdots$ 均成立,讨论 $k=s+1$ 的情形:由(3.38)式可得 $|X|=1$ 时,

$$\begin{aligned} D_X^{s+1} J_{n+2l+1} &= D_X\left\{\sum_{j=0}^{r(s)} A_{s,l}^j (h,X)^{s-2j} J_{n+2l+1+2s-2j}\right\} \\ &= \sum_{j=0}^{r(s)} A_{s,l}^j (s-2j) \\ &\quad \times (h,X)^{s-2j-1} J_{n+2l+1+2s-2j} \\ &\quad + \sum_{j=0}^{r(s)} A_{s,l}^j (-1)(n+2l+1+2s-2j) \\ &\quad \times (h,X)^{s-2j+1} J_{n+2l+3+2s-2j} \\ &= \sum_{j=1}^{r(s+1)} A_{s,l}^{j-1} (s+2-2j) \\ &\quad \times (h,X)^{s-2j+1} J_{n+2l+3+2s-2j} \\ &\quad + \sum_{j=0}^{r(s)} A_{s,l}^j (-1)(n+2l+1+2s-2j) \\ &\quad \times (h,X)^{s-2j+1} J_{n+2l+3+2s-2j}. \end{aligned}$$

当 s 为正偶数时,$r(s)=r(s+1)$,而当 s 为正奇数时 $r(s+1)$

$=r(s)+1$. 从而可得：当 $0\leqslant j\leqslant r(s)$ 时，

$$A^{j}_{s+1,l}=A^{j-1}_{s,l}(s+2-2j)-(n+2l+1+2s-2j)A^{j}_{s,l},$$

由归纳假设可得

$$\begin{aligned}
&|A^{j}_{s+1,l}|\\
&\quad\leqslant (s+2-2j)|A^{j-1}_{s,l}|+(n+2l+1+2s-2j)|A^{j}_{s,l}|\\
&\quad\leqslant (s+2-2j)2^{s}C^{j-1}_{s}\Gamma^{s}_{n+2l+1}\\
&\qquad+(n+2l+1+2s-2j)2^{s}C^{j}_{s}\Gamma^{s}_{n+2l+1}\\
&\quad\leqslant 2^{s+1}C^{j-1}_{s}\Gamma^{s+1}_{n+2l+1}+2^{s+1}C^{j}_{s}\Gamma^{s+1}_{n+2l+1}\\
&\quad=2^{s+1}C^{j}_{s+1}\Gamma^{s+1}_{n+2l+1}.
\end{aligned}$$

而当 s 为正奇数时，易得

$$A^{r(s+1)}_{s+1,l}=A^{r(s)}_{s,l},$$

$$|A^{r(s+1)}_{s+1,l}|\leqslant 2^{s+1}C^{r(s+1)}_{s+1}\Gamma^{s-1}_{n+2l+1},$$

这就证明了(3.38)和(3.39)式对一切正整数 k、l 均成立. 这就得到，对 $k,l=0,1,2,\cdots$

$$|D^{k}_{X}J_{n+2l+1}|\leqslant 2^{2k}\Gamma^{k}_{n+2l+1}J_{n+2l+1+k}. \tag{3.40}$$

取 $l=0$ 即可得到：当 $h\in\mathfrak{h}$ 时，

$$\sup_{X\in\mathfrak{h},|X|=1}\{|(D^{k}_{X}\Phi^{0}_{t})(h)|\}$$

$$\leqslant\frac{B_{1}2^{2k}\Gamma\left(\frac{1}{2}(n+1)+k\right)t}{\Gamma\left(\frac{1}{2}(n+1)\right)(t^{2}+|h|^{2})^{\frac{1}{2}(n+1+k)}}. \tag{3.41}$$

由此可得到引理的径向收敛的结论成立.

取 $X_{1},\cdots,X_{q}$ 为 $\mathfrak{h}$ 的一组标准正交基，它们对应的方向导数简记为 D_{j} $(j=1,2,\cdots,q)$，特别可取为 $D_{j}=\dfrac{\partial}{\partial h_{j}}$ $(j=1,2,\cdots,q)$. 则可证明对一切的 $\alpha\in Z^{q}_{+},l=0,1,2,\cdots$，有

$$\left|\left(\frac{\partial}{\partial h}\right)^{\alpha}J_{n+2l+1}\right|\leqslant 2^{2k}\Gamma^{k}_{n+2l+1}J_{n+2l+1+k},$$

$$|\alpha|=k. \tag{3.42}$$

这只要对 $\alpha=(\alpha_{1},\alpha_{2},\cdots,\alpha_{q})$ 中不等于零的坐标个数 s 作归纳证明

即可. 当 $s=1$ 时,由(3.40)即得(3.42),若(3.42)式对 $1\leqslant s\leqslant q-1$ 成立,则对 $s+1$ 的情形,就有

$$\alpha=\alpha_j e_j+\beta,\ \alpha_j\neq 0,\ (e_j,\beta)=0,$$

而 β 至多有 s 个坐标不为 0,其中 e_j 是第 j 个单位向量. 由(3.38)式,有

$$\left(\frac{\partial}{\partial h}\right)^{\alpha}J_{n+2l+1}=\left(\frac{\partial}{\partial h}\right)^{\beta}\left\{\sum_{p=0}^{r(\alpha_j)}A^p_{\alpha_j,l}h_j^{\alpha_j-2p}\quad J_{n+2l+1+2\alpha_j-2p}\right\}$$

$$=\sum_{p=0}^{r(\alpha_j)}A^p_{\alpha_j,l}h_j^{\alpha_j-2p}\quad\left(\frac{\partial}{\partial h}\right)^{\beta}J_{n+2l+1+2\alpha_j-2p}.$$

由归纳假设,对任意的 $l=0,1,2,\cdots$ 和非零坐标的个数 $\leqslant s$ 的 β,(3.42)式成立,从而可得

$$\left|\left(\frac{\partial}{\partial h}\right)^{\alpha}J_{n+2l+1}\right|\leqslant\sum_{p=0}^{r(\alpha_j)}|A^p_{\alpha_j,l}|2^{2|\beta|}\Gamma^{|\beta|}_{n+2l+1+2\alpha_j-2p}J_{n+2l+1+|\alpha|}$$

$$\leqslant\sum_{p=0}^{r(\alpha_j)}2^{\alpha_j}\Gamma^{\alpha_j}_{n+2l+1}C^p_{\alpha_j}\Gamma^{|\beta|}_{n+2l+1+2\alpha_j}J_{n+2l+1+|\alpha|}$$

$$=2^{2|\alpha|}\Gamma^{|\alpha|}_{n+2l+1}J_{n+2l+1+|\alpha|}.$$

这就证明了(3.42)式. 由此即得:对于 $h\in\mathfrak{h}$,有

$$\sup_{|\alpha|=k}\left\{\left|\left(\left(\frac{\partial}{\partial h}\right)^{\alpha}\Phi_l^0\right)(h)\right|\right\}$$

$$\leqslant\frac{B_1\Gamma\left(\frac{1}{2}(n+1)+k\right)t}{\Gamma\left(\frac{1}{2}(n+1)\right)(t^2+|h|^2)^{\frac{1}{2}(n+1+k)}}.\tag{3.43}$$

这表明在(3.36)式中取 $W=uX$, $|X|=1$ 时,有

$$\sum_{\alpha\in Z^q_+}|a_\alpha|\cdot|W^\alpha|\leqslant\sum_{\alpha\in Z^q_+}|a_\alpha|u^{|\alpha|}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{|\alpha|=k}|a_\alpha|u^k$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{|\alpha|=k}\frac{1}{\alpha!}\left(\left(\frac{\partial}{\partial h}\right)^{\alpha}\Phi_l^0\right)(h_0)u^k$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{\infty} cu^k (1+k)^{\frac{1}{2}(n-1)}$$

$$\times 2^{2k} |h_0|^{-(n+1)-k} \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!}$$

$$= \frac{c}{|h_0|^{n+1}} \sum_{k=0}^{\infty} (1+k)^{\frac{1}{2}(n-1)} \left(\frac{4q}{|h_0|} \right)^k u^k, \tag{3.44}$$

这表明当 $|W| < \frac{1}{4q}|h_0|$ 时(3.44)收敛. 于是引理得证. ∎

下面的引理 3.2 是显然的.

引理 3.2　设 $D(h)$ 和 $D_1(h)$ 分别由(2.18)式和(3.28)式定义，则存在定义在 Λ 上的函数 $\varepsilon(a)$ 和 $\varepsilon_1(a)$，它们的值仅取为 1 或 -1，使得

$$D(a+h) = \varepsilon(a) D(h), \quad D_1(a+h) = \varepsilon_1(a) D_1(h)$$

对一切的 $h \in \mathfrak{h}$ 和 $a \in \Lambda$ 成立.

将引理 3.1 和引理 3.2 用于(3.31)式可得如下引理 3.3.

引理 3.3　设 $h_0 \in Q$，$D(h_0)=0$，且 $h_0 \neq 0$ 或 $h_0 = 0$ 但 $a \neq 0$，则存在仅依赖于 G 和 $a+h_0$ 的正数 $r(h_0)$，使得(3.31)式定义的函数 $C_l(a+h_0+y+\sigma(z))$ 在 $|y+\sigma(z)| < r(h_0)$ 时可展开成 $y+\sigma(z)$ 的幂级数.

证明　由 $D_1(h)$ 的定义(3.28)式，存在仅依赖于 h_0 和 G 的正数 $r_1(h_0)$，使当 $|y+\sigma(z)| < r_1(h_0)$ 时，$D_1(a+h_0+y+\sigma(z))^{-1}$ 可展成 $y+\sigma(z)$ 的幂级数. 又因为 y 与 $\sigma(z)$ 正交，因而 $|y+\sigma(z)| = |y+z|$，即 $r_1(h_0)$ 与 $\sigma \in W(h_0)$ 无关，而由(3.32)式和引理 3.2，存在仅依赖于 G 和 $a+h_0$ 的正数 $r_2(a+h_0)$，使当 $|y+\sigma(z)| < r_2(a+h_0)$ 时，$\Psi_l^0(a+h_0+y+\sigma(z))$ 可展成 $y+\sigma(z)$ 的幂级数. 取

$$r(h_0) = \min\{r_1(h_0), r_2(a+h_0)\}$$

就得到引理. ∎

引理 3.4　设 $P_2(z)$、$A_l(a+h_0; y, z)$ 和 F 分别由(3.22)式、(3.30)式和(3.33)式定义，$h_0 \in F$，$a \in \Lambda$，且 $a+h_0 \neq 0$. 则有

$$A_l(a+h_0; y, z) = B_l(a+h_0; y, z) P_2(z), \tag{3.45}$$

成立. 其中 $B_t(a+h_0;y,z)$在$|y+z|<r(h_0)$上可展成 y、z 的幂级数, $r(h_0)$由引理 3.3 给出.

证明 由(3.33)式, 对取定的 a、h_0 和 y, 作为 z 的函数 $A_t(a+h_0;y,z)$关于 $W(h_0)$是反对称的. 而由引理 3.3 和(3.33)式, $A_t(a+h_0;y,z)$在$|y+z|<r(h_0)$时可展成 y、z 的幂级数, 当固定 y 时关于 z 在 $W(h_0)$中的元的作用下反对称. 因此看作 z 的幂级数, 它的展开式必含有 $P_2(z)$因子. 所以引理的等式成立, 且 $B_t(a+h_0;y,z)$在$|y+z|<r(h_0)$时可展成 y 和 z 的幂级数. 这就证明了引理. ▌

记 $\tilde{B}(h,r)$为 $\mathfrak{h}$ 中以 h 为中心、半径为 r 的开球, $\tilde{B}(0,r_0)\subset Q$ 是 Q 中使得 $D_0(h)$恒不为零的、以 0 为中心的最大的球. 则当 $0\neq a\in A$时, 必有$|a|\geqslant r_0$. 再取 $r(0)=\frac{1}{16q}r_0$, 则当 $h_0=0$、$a+h_0\neq 0$ 时, 引理 3.4 对$|y+z|<r(0)$成立.

由于对每个 $h_0\in F$, 存在 $r(h_0)\leqslant r(0)$, 使得当 $h\in\tilde{B}(h_0,r(h_0))$时, 引理 3.4 成立, 因此球族

$$\left\{\tilde{B}\left(h_0,\frac{1}{2}r(h_0)\right),h_0\in F\right\}$$

就覆盖了 F. 由于 F 是紧致的, 就可选出有限个点 $h_k\in F$, $k=0,1,\cdots,N_0$, 适合 $h_0=0$, $|h_k|\geqslant r(0)$, $k=1,2,\cdots,N_0$, 使得

$$\Omega=\tilde{B}(0,r(0))\cup\left\{\bigcup_{k=1}^{N_0}\tilde{B}\left(h_k,\frac{1}{2}r(h_k)\right)\right\} \tag{3.46}$$

覆盖了 F.

对每个 $h\in Q$, 下面三者之一必成立: (i) $h\in Q\backslash\Omega$; (ii) $h\in\tilde{B}\left(h_k,\frac{1}{2}r(h_k)\right)$, $k=1,2,\cdots,N_0$; (iii) $h\in\tilde{B}(0,r(0))$.

当 $h\in Q\backslash\Omega$ 时, 因为 $Q\backslash\Omega$ 是紧致的, $D(h)$在 $Q\backslash\Omega$ 上恒不为零, 从而存在仅依赖于 G、k 和 Ω 的正数 A_k, 使得

$$\sup_{|\alpha|\leqslant k}\left\{\left|\left(\left(\frac{\partial}{\partial h}\right)^{\alpha}D(\cdot)^{-1}\right)(h)\right|\right\}\leqslant A_k,$$
$$h\in Q\backslash\Omega. \tag{3.47}$$

将(3.43)和(3.47)式应用于(3.18)式中具体计算，可得到当$h\in Q\backslash\Omega$时，有

$$\sup_{|\alpha|\leqslant k}\left\{\left|\left(\left(\frac{\partial}{\partial h}\right)^{\alpha}B_t\right)(h)\right|\right\}$$
$$\leqslant 3^k A_k B_1 \Gamma_{n+1}^k t\sum_{a\in\Lambda}(t^2+|a+h|^2)^{-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}(n+q)\right)}.$$

由于$h\in Q\backslash\Omega$必有$|h|\geqslant r(0)$，从而存在仅依赖于G和k及$r(0)$的正数M_k，使得

$$\sup_{|\alpha|\leqslant k}\left\{\left|\left(\left(\frac{\partial}{\partial h}\right)^{\alpha}B_t\right)(h)\right|\right\}\leqslant M_k,\ h\in Q\backslash\Omega. \tag{3.48}$$

当$h\in\widetilde{B}\left(h_l,\frac{1}{2}r(h_l)\right)$，$l=1,2,\cdots,N_0$时，由(3.29)式、(3.18)式定义的$B_t(h)$可以写成

$$B_t(h)=\sum_{a\in\Lambda(h_l)}\frac{\varepsilon(a,h_l)}{|W(a,h_l)|}B_t(a+h_l,y,z)P_2(z)/D_2(z), \tag{3.49}$$

其中$h=h_l+y+z$由(3.27)式定义.

因为$r(h_l)\leqslant r(0)$，$|y+z|<\frac{1}{2}r(h_l)$. 由$r(0)$、$P_2(z)$及$D_2(z)$的定义，$P_2(z)/D_2(z)$在$|z|\leqslant r(0)$上恒不为零，从而当$|y+z|<\frac{1}{2}r(h_l)$时，存在与l无关的正数A_k，使

$$\sup_{|\alpha|\leqslant k}\left\{\left|\left(\left(\frac{\partial}{\partial h}\right)^{\alpha}(P_2(\cdot)/D_2(\cdot))\right)(z)\right|\right\}\leqslant A_k. \tag{3.50}$$

又因为$D_1(a+h_l)\neq 0$，且由$r(h_l)$的定义，$D_1(a+h)^{-1}$在$h=h_l$点展开为幂级数时在$h\in\widetilde{B}(h_l,r(h_l))$上绝对收敛，从而可得到存在与$l$无关的正数$B_k$，使

$$\sup_{|\alpha|\leqslant k}\left\{\left|\left(\left(\frac{\partial}{\partial h}\right)^{\alpha}D_1(a+\cdot)^{-1}\right)(h)\right|\right\}\leqslant B_k. \tag{3.51}$$

再由引理3.1、引理3.3和引理3.4具体计算$B_t(a+h_l;y,z)$，则当$|y+z|<\frac{1}{2}r(h_l)$，$l=1,2,\cdots,N_0$时，存在不依赖于l的正数C_k，使得

$$\sup_{|\alpha|\leqslant k}\left\{\left|\left(\frac{\partial}{\partial h}\right)^{\alpha}B_t(a+h_l;y,z)\right|\right\}$$

$$\leqslant C_k t(t^2+|a+h_l|^2)^{-\frac{1}{2}(q+1)}, \tag{3.52}$$

其中 $h=h_l+y+z$. 由此可得：当 $h\in\widetilde{B}\left(h_l,\frac{1}{2}r(h_l)\right)$，$l=1,2,\cdots,N_0$ 时，对(3.18)式定义的 $B_t(h)$，存在正数 M_k，使

$$\sup_{|\alpha|\leqslant k}\left\{\left|\left(\frac{\partial}{\partial h}\right)^{\alpha}B_t(h)\right|\right\}\leqslant M_k. \tag{3.53}$$

而当 $h\in\widetilde{B}(0,r(0))$时，(3.29)式中 $a\neq 0$ 的各项之和的导数估计与 $h\in\widetilde{B}\left(h_l,\frac{1}{2}r(h_l)\right)$是相同的，因而有类似于(3.52)式的不等式，因此有

$$\left|\left(\frac{\partial}{\partial h}\right)^{\alpha}B_t(h)\right|\leqslant\left|\left(\frac{\partial}{\partial h}\right)^{\alpha}(\Phi_t^0(\cdot)D_0(\cdot)^{-1})(h)\right|+M_k \tag{3.54}$$

其中$|\alpha|\leqslant k$，M_k 是适当的正常数.

注意到当$|h|\leqslant r(0)$并且 $0<t\leqslant 1$ 时有

$$(t^2+|h|^2)^{-1}\geqslant(1+r(0)^2)^{-1}.$$

因而由(3.48)、(3.53)和(3.54)式就得到：当 $h\in Q$，$0<t\leqslant 1$ 时，存在与 h 和 t 无关的正数 m_k 和 M_k，使得下式成立：

$$\sup_{|\alpha|\leqslant k}\left\{\left|\left(\left(\frac{\partial}{\partial h}\right)^{\alpha}B_t\right)(h)\right|\right\}$$

$$\leqslant\frac{\eta(h)m_k t}{(t^2+|h|^2)^{\frac{1}{2}(n+1+k)}}+M_k, \tag{3.55}$$

其中 $B_t(h)$由(3.18)式定义，$\eta(h)$在$|h|\leqslant r(0)$上的值为 1，在$|h|\geqslant 2r(0)$上值为 0. 当 $r(0)<|h|<2r(0)$时，$\eta(h)$的值介于(0,1)之间，且 $\eta(h)$是 C^∞ 的径向函数.

紧致齐性空间 M 上的 Abel－龚核可用 $B_t(h)$表示为如下形式：

$$A_t(m)=\int_K B_t(h(p(m)\cdot k))\mathrm{d}k, \tag{3.56}$$

其中 $h(p(m)\cdot k)\in Q$，适合

$$p(m)\cdot k = y\exp h(p(m)\cdot k)y^{-1},\ y\in G.$$

一般地说，$x=y\exp h(x)y^{-1}$的解 y 和 $h(x)\in Q$ 不唯一. 当 y、$h(x)$ 使等式成立时，必有 y_σ 和 $\sigma(h(x))$，$\sigma\in W$；当 $\sigma(h(x))\in Q$ 时，使 $x=y_\sigma\exp\sigma(h(x))y_\sigma^{-1}$ 成立. 当 $h(x)$是 Q 的边界点时，必有 $a\in\Lambda$，使 $a+h(x)\in Q$，$x=y\exp(a+h(x))y^{-1}$成立. 但是因为$B_t(\sigma(h))=B_t(h)$对任意的 $\sigma\in W$ 成立；$B_t(a+h)=B_t(h)$对任意 $a\in\Lambda$ 成立. 所以 $B_t(h(x))$是定义好的，它是 G 上的 C^∞的中心函数.

考虑 $A_t(m)$的导数，如同§1.3 中所述，将 $\mathfrak{p}$ 看作 M 在 o 点的切空间，对 $0\neq Y\in\mathfrak{p}$，令

$$(D_Y^k f)(m) = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^k f(p(m)\exp tY\cdot 0)\bigg|_{t=0}, \tag{3.57}$$

其中 $k=0,1,2,\cdots$，则可得

$$(D_Y^k A_t)(m) = \int_K\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\right)^k B_t(h(p(m)\exp uYk))\bigg|_{u=0}\mathrm{d}k.$$

又因为

$$p(m)\exp uYk = p(m)k\exp uAdk^{-1}(Y)$$

及$|Y|=|Adk(Y)|$，由后面的 3.1.5 小节中定理 3.3 可得到仅依赖于 M 和 k 的正数 B_k，使得以下不等式成立：

$$\sup_{Y\in\mathfrak{p},|Y|=1}\{|(D_Y^k A_t)(m)|\}$$
$$\leqslant A_k\int_K\sup_{X\in\mathfrak{h},|X|=1,1\leqslant l\leqslant k}\{|(D_X^l B_t)(h(p(m)k))|\}\mathrm{d}k.$$

再根据(3.55)式，就得到当 $0<t\leqslant 1$ 时

$$\sup_{Y\in\mathfrak{p},|Y|=1}\{|(D_Y^k A_t)(m)|\}$$
$$\leqslant m_k\int_K\frac{\eta(h(p(m)\cdot k))t}{(t^2+|h(p(m)\cdot k)|^2)^{\frac{1}{2}(n+1+k)}}\mathrm{d}k + M_k, \tag{3.58}$$

其中 m_k 和 M_k 仅依赖于 M、k 和 b_0，$l=\dim M$.

如同定理 2.16 的证明中一样，计算(3.58)式的积分，就得到当 $0<t\leqslant 1$ 时，有

$$\sup_{Y\in\mathfrak{p},|Y|=1}\{|D_Y^k A_t(m)|\}\leqslant\frac{m_k'\eta(m)t}{(t^2+|m|^2)^{\frac{1}{2}(l+1+k)}} + M_k, \tag{3.59}$$

其中 D_Y 由(2.57)式定义，$|m|=\mathrm{d}(m,o)$，$\eta(m)$是 M 中的测地球 $\{m\in M,\mathrm{d}(m,o)<r(0)\}$的特征函数，$l=\dim M$.

取定 $r(0)$后，(3.59)式中的 m_k' 和 M_k 仅依赖于 M 和 k，将(3.59)式用于(3.17)式的估计，可得

$$\begin{aligned}\|\nabla(A_t*f)(\xi)\| \leqslant{}& \sqrt{l}M_1\|f\|_1+m_1'\sqrt{l}\\&\times\int_{\mathrm{d}(p(w)^{-1}\cdot\xi,o)\leqslant b_0}t(t^2+\mathrm{d}(p(w)^{-1}\\&\times\xi,o)^2)^{-\frac{1}{2}(l+2)}|f(w)|\mathrm{d}w,\end{aligned}$$

其中 $\mathrm{d}(\xi,m)<\mathrm{d}(n,m)<\alpha t$，因为 $p(w)$ $(w\in M)$是 M 上的等度量变换，从而

$$\mathrm{d}(p(w)^{-1}\cdot\xi,o)=\mathrm{d}(\xi,w)\leqslant\mathrm{d}(m,w)+\mathrm{d}(\xi,m).$$

由此可得：当 $\mathrm{d}(m,w)\geqslant 2\alpha t$ 时，

$$\frac{1}{2}\mathrm{d}(m,w)\leqslant\mathrm{d}(\xi,w)\leqslant\frac{3}{2}\mathrm{d}(m,w),$$

而当 $\mathrm{d}(m,w)<2\alpha t$ 时，则有

$$\begin{aligned}\frac{t^2+\mathrm{d}(m,w)^2}{4\alpha^2+1}&\leqslant t^2+\mathrm{d}(\xi,w)^2\\&\leqslant(9\alpha^2+1)(t^2+\mathrm{d}(m,w)^2).\end{aligned}$$

又因为

$$\mathrm{d}(n,m)\leqslant\alpha t\leqslant\alpha(t^2+\mathrm{d}(n,w)^2)^{\frac{1}{2}},$$

因此存在仅依赖于 M 和 α 的正数 B_2，使下式成立：

$$\begin{aligned}&\mathrm{d}(n,m)\|\nabla(A_t*f)(\xi)\|\\&\leqslant B_2\|f\|_1+B_2\int_{\mathrm{d}(m,w)\leqslant b_0}t(t^2+\mathrm{d}(m,w)^2)^{-\frac{1}{2}(l+1)}\\&\quad\times|f(w)|\mathrm{d}w.\end{aligned}\tag{3.60}$$

在(3.59)式中取 $k=0$ 就是$|A_t(m)|$的估计，因此可得到仅依赖于 M 的正数 B_3，使下式成立：

$$\begin{aligned}|A_t*f(m)|\leqslant{}&B_3\|f\|_1\\&+B_3\int_{\mathrm{d}(m,w)\leqslant b_0}t(t^2+\mathrm{d}(m,w)^2)^{-\frac{1}{2}(l+1)}|f(w)|\mathrm{d}w.\end{aligned}$$

(3.61)

综合(3.60)、(3.61)和(3.16)式，就得到$(t,n)\in\Gamma_a(m)$时的$|A_t*f(n)|$的估计：

$$|A_t*f(n)|\leqslant B_3\|f\|_1+B_3\int_{d(m,w)\leqslant b_0}t(t^2+d(m,w)^2)^{-\frac{1}{2}(l+1)}|f(w)|dw. \tag{3.62}$$

由(3.15)式的 HL(f)的定义，易得到仅依赖于 M 的正数 B_4，使对一切的 $m\in M$ 均有

$$\|f\|_1\leqslant B_4\mathrm{HL}(f)(m) \tag{3.63}$$

成立.

当 b_0 选得适当小时，在 $m\in M$ 点的法坐标系$\{(x_1,\cdots,x_l)\}$中有

$$d(m,w)=(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_l^2)^{\frac{1}{2}},$$

其中

$$\begin{aligned}p(m)^{-1}w&=\exp_m(x_1X_1+x_2X_2+\cdots+x_lX_l)\\&\equiv\exp_mX,\end{aligned}$$

$X_1,\cdots,X_l$ 是 $T_m(M)$的一组标准正交基.

因此(3.62)式的积分就变成了欧氏空间中的积分

$$\begin{aligned}&\int_{d(m,w)\leqslant b_0}t(t^2+d(m,w))^{-\frac{1}{2}(l+1)}|f(w)|dw\\&=\int_{|X|\leqslant b_0}t(t^2+|X|^2)^{-\frac{1}{2}(l+1)}\\&\quad\times|f(p(m)\exp_m(X))\sqrt{g_m(X)}|dX,\end{aligned}$$

其中$\sqrt{g_m(X)}dX$ 是局部坐标系下的 Riemann 体积元.

由于

$$\begin{aligned}&\int_{B(m,r)}|f(w)|dw\\&=\int_{|X|\leqslant r}\left|f(p(m)\exp_m(X))\sqrt{g_m(X)}\right|dX\end{aligned}$$

以及存在仅依赖于 M 的正数 a_1 和 b_1 使得

$$a_1 r^l \leqslant |B(m,r)| \leqslant b_1 r^l,$$

其中 $B(m,r)$ 是 M 中以 m 为中心、半径为 r 的测地球，$|B(m,r)|$ 是 $B(m,r)$ 的体积，由欧氏空间中已知的结果，就得到

$$\int_{d(m,w)\leqslant \delta_0} t(t^2 + d(m,w)^2)^{-\frac{1}{2}(l+1)} |f(w)| dw$$

$$\leqslant C\mathrm{HL}(f)(m). \tag{3.64}$$

其中 C 为仅依赖于 M 的正数.

由(3.62)、(3.63)和(3.64)可得到存在仅依赖于 M 和 α 的正数 C_α，使

$$A^*_{\alpha\nabla}(f)(m) \leqslant C_\alpha \mathrm{HL}(f)(m)$$

成立.

当 $f\in C^\infty(M)$ 时，f 的 Fourier 级数被一个收敛的正项级数所控制，因而当 $t\to 0$ 时，$A_t * f$ 绝对一致收敛于 f，从而 $A_t * f$ 处处非切向收敛于 f. 再由上式，就得到当 $f\in L^p, p\geqslant 1$ 时，$A_t * f$ 几乎处处非切向收敛. 而由第 2 章 §2.3 节的定理 2.9，$t\to 0$ 时 $A_t * f$ 几乎处处收敛于 f，从而最终可得 $A_t * f$ 几乎处处非切向收敛于 f. 于是完成了定理 3.2 的证明. ∎

由定理 3.1、定理 3.2 和定理 2.16 即可推出如下推论：

推论 3.1 若 $f\in L^p(M), p\geqslant 1$，则 $P_t * f$ 几乎处处非切向收敛于 f，并且存在仅依赖于 M 和 α 的正数 C_α，使 $P^*_{\alpha\nabla}(f)(m)\leqslant C_\alpha\mathrm{HL}(f)(m)$ 成立.

3.1.5 中心函数的导数估计

在 3.1.4 小节定理 3.2 的证明中，用到了连通的紧致齐性空间 $M=G/K$ 上中心函数的导数估计，它又可归结为连通的紧致李群 G 上中心函数的导数估计. 在这一小节中，就证明这一导数估计.

设 $M=G/K$，$\mathfrak{g}$ 是 G 的李代数，$(*,*)$是 $\mathfrak{g}$ 上的不变内积，$\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个 Cartan 子代数，$\mathfrak{g}=\mathfrak{k}\oplus\mathfrak{p}$ 由(1.58)式定义，$m=p(m)\cdot o$ 由(1.59)式定义. 又设 $n=\dim\mathfrak{g}, q=\dim\mathfrak{h}$，

$$\{X_1,X_2,\cdots,X_n\},\ \{H_1,H_2,\cdots,H_q\} \tag{3.65}$$

分别是 $\mathfrak{g}$ 和 $\mathfrak{h}$ 的一组标准正交基，它们产生了 G 上的左不变微分算子：

$$\widetilde{X}^m = \widetilde{X}_1^{m_1}\widetilde{X}_2^{m_2}\cdots\widetilde{X}_n^{m_n},$$

$$\widetilde{H}^\alpha = \widetilde{H}_1^{\alpha_1}\widetilde{H}_2^{\alpha_2}\cdots\widetilde{H}_q^{\alpha_q}, \tag{3.66}$$

其中 $m=(m_1,m_2,\cdots,m_n)$ 和 $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_q)$ 分别是 n 维和 q 维的非负整格点，并记

$$|m| = m_1 + m_2 + \cdots + m_n,\ |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_q. \tag{3.67}$$

定义 3.3　设 $f\in C^k(M)$，$Y\in\mathfrak{p}$，定义

$$(D_Yf)(m) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(p(m)\exp tY\cdot o)\bigg|_{t=0}.$$

又设 $a_m\in\boldsymbol{R}$，定义 G 上的 k 阶左不变微分算子为

$$P_k(\widetilde{X}) = \sum_{|m|\leqslant k}a_m\widetilde{X}^m.$$

G 上的 k 阶左不变微分算子全体形成一个有限维的实线性空间，在这一线性空间中可取一个内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle$，使得 $\{\widetilde{X}^m,|m|\leqslant k\}$ 是它的一组标准正交基，并记

$$\|P_k(\widetilde{X})\| = \langle P_k(\widetilde{X}),P_k(\widetilde{X})\rangle^{\frac{1}{2}}.$$

对紧致齐性空间 M 上的中心函数 $f\in C_f^k(M)$ 的导数估计，有下面的定理：

定理 3.3　设 $f\in C_f^k(M)$、$F\in C_f^k(G)$，且适合

$$f(m) = \int_K F(p(m)k)\mathrm{d}k.$$

则对 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_s\in\mathfrak{p}$，$s\leqslant k$，有

$$|(D_{Y_1}D_{Y_2}\cdots D_{Y_s}f)(m)| \leqslant \|\widetilde{Y}_1\widetilde{Y}_2\cdots\widetilde{Y}_sF\|_\infty$$

成立.

G 上的 k 次连续可微的中心函数 $f\in C_f^k(G)$ 在 Cartan 子群 $T=\exp\mathfrak{h}$ 上的限制，是 T 上的 Weyl 群不变的 k 次连续可微的函数，它又可看作 $\mathfrak{h}$ 上的、Weyl 群不变的、k 次连续可微的多重周期

函数，将它简记为 $f(\exp\cdot)$. 再对 $h\in\mathfrak{h}$，在 $\mathfrak{h}$ 的标准正交基(3.65)式之下，它的坐标表示记为

$$h = h_1H_1 + h_2H_2 + \cdots + h_qH_q \tag{3.68}$$

并记

$$\left(\frac{\partial}{\partial h}\right)^{\alpha} = \left(\frac{\partial}{\partial h_1}\right)^{\alpha_1}\left(\frac{\partial}{\partial h_2}\right)^{\alpha_2}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial h_q}\right)^{\alpha_q},$$

则对紧致李群 G 上的中心函数有如下的导数估计：

定理3.4 设 $f\in C_I^k(G)$，$s\leqslant k$，则有

$$\begin{aligned}&|(P_s(\widetilde{X})f)(x)|\\ &\leqslant A_s\|P_s(\widetilde{X})\|\sup_{|\alpha|\leqslant s}\left\{\left\|\left(\frac{\partial}{\partial h}\right)^{\alpha}f(\exp\cdot)\right\|_{\infty}\right\}\end{aligned}$$

成立. 其中 $x\in G$，A_s 是仅由 G 和 s 决定的正常数.

为证明定理 3.3 和 3.4，先证明几个预备引理：

引理3.5 对每个正整数 k，适当的选取 $\mathfrak{g}$ 的一组单位向量 $Z_1,Z_2,\cdots,Z_s$，则 $\{\widetilde{Z}_j^p,1\leqslant j\leqslant s,0\leqslant p\leqslant k\}$ 包含了 G 上 k 阶左不变微分算子所成的有限维线性空间的一组基，使每个 $P_k(\widetilde{X})$ 均可唯一的表示成

$$P_k(\widetilde{X}) = \sum_{p=0}^{k}\sum_{r=0}^{s}a_{pr}\widetilde{Z}_r^p. \tag{3.69}$$

再记

$$\|\{a_{pr}\}\| = \left(\sum_{p=0}^{k}\sum_{r=0}^{s}|a_{pr}|^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

则存在仅由 G 和 k 决定的正数 b_k 和 B_k，使得

$$b_k\|P_k(\widetilde{X})\| \leqslant \|\{a_{pr}\}\| \leqslant B_k\|P_k(\widetilde{X})\|.$$

证明 记 $\chi_k(G)$ 是 G 上 k 阶左不变微分算子所成的线性空间，则 $\{\widetilde{X}^m,|m|\leqslant k\}$ 是 $\chi_k(G)$ 的一组基. 再记 $\chi_{k,l}(G)$ 是 $\{\widetilde{X}^m,|m|=l\}$ 在 $\chi_k(G)$ 中张成的实线性子空间，则 $\chi_k(G)$ 是 $\chi_{k,l}(G)$ $(l=0,1,\cdots,k)$ 的直和，且 $\chi_{k,l}(G)$ 是 $C_{n+l-1}^l=(n+l-1)!/[(n-1)!\ l!]$ 维的.

取引理中的 $s=C_{n+k-1}^k$，再令

$$Z_j = z_{j1}X_1 + z_{j2}X_2 + \cdots + z_{jn}X_n,$$

则向量组$\{Z_j\}=\{Z_1,Z_2,\cdots,Z_s\}$与$R^{s\times n}$中的点$\{z_{jr}\}=\{z_{jr},j=1,2,\cdots,s,r=1,2,\cdots,n\}$的一一对应记为$\pi_k(\{Z_j\})=\{z_{jr}\}$.

再记

$$z_j = (z_{j1},z_{j2},\cdots,z_{jn}),$$
$$(z_j)^m = (z_{j1})^{m_1}\cdots(z_{jn})^{m_n},$$

则对$1\leqslant l\leqslant k$容易验证

$$\widetilde{Z}_j^l = \sum_{|m|=l}\frac{l!}{m!}(z_j)^m\widetilde{X}^m + P_{l-1}(\widetilde{X})_j,$$

其中$m!=m_1!\cdots m_n!$,$P_{l-1}(\widetilde{X})_j\in\chi_{l-1}(G)$. 由此可得

$$\{\widetilde{Z}_j^l\} \equiv \{\widetilde{Z}_j^l, j=1,2,\cdots,C_{n+l-1}^l, l=0,1,\cdots,k\} \quad (3.70)$$

是$\chi_k(G)$的一组基的充要条件为

$$\left\{\sum_{|m|=l}\frac{l!}{m!}(z_j)^m\widetilde{X}^m, j=1,2,\cdots,C_{n+l-1}^l, l=0,1,\cdots,k\right\} \quad (3.71)$$

是$\chi_k(G)$的一组基.

在基$\{\widetilde{X}^m,|m|\leqslant l\}$之下,向量集(3.71)的矩阵.$A(z_{jr})$是1和$C_{n+l-1}^l\times C_{n+l-1}^l$的方阵$A_l(z_{jr})$　$(l=1,2,\cdots,k)$组成的准对角阵,其中$A_l(z_{jr})$是$A(z_{jr})$在$\chi_{k,l}(G)$上的限制. 记$R^{s\times n}$中的k个曲面$\det A_l(z_{jr})=0$　$(l=1,2,\cdots,k)$的并集为F_k,则F_k是$R^{s\times n}$中伸缩不变的低维闭子集,且(3.70)和(3.71)式是$\chi_k(G)$的基的充要条件就是$(z_{jr})\in R^{s\times n}\backslash F_k$. 再记

$$\Omega_k = \{\{z_{jr}\}\in R^{s\times n}, (z_{j1})^2+\cdots+(z_{jn})^2=1, j=1,\cdots,s\},$$

则$F_k\cap\Omega_k$是Ω_k的低维紧子集. 当$\{z_{jr}\}\in\Omega_k\backslash F_k$时$\{Z_j\}=\pi_k^{-1}(\{z_{jr}\})$是$\mathfrak{g}$的$s$个单位向量,$\{\widetilde{Z}_j^l\}$是$\chi_k(G)$的一组基,取引理中$P_k(\widetilde{X})$表示式的系数$a_{pr}$适合于当$r>C_{n+p-1}^p$时$a_{pr}=0$,则$P_k(\widetilde{X})$的表示式是唯一的,这时由$\{a_m\}$和$\{a_{pr}\}$的关系,仅依赖于$G$和$k$的正数$b_k$立即可求出,而$B_k$则依赖于$G$、$k$和$\{z_{jr}\}\in\Omega_k\backslash F_k$. 适当限制$\{z_{jr}\}$在$\Omega_k\backslash F_k$中的变化范围,就可认为$B_k$仅依赖于$G$和$k$,从而完成了引理的证明. ▌

设 Q 是 §1.3 节的 1.3.2 小节中定义的 $\mathfrak{h}$ 中以原点为中心的平行多面体，它又是

$$\mathfrak{h}/(\exp^{-1}e \cap \mathfrak{h})$$

的等价类代表元的集合，其中 $\exp^{-1}e$ 是 G 的幺元 e 在指数映射 exp 下的完全反象，$\exp^{-1}e\cap\mathfrak{h}$ 是 G 的特征格. 则存在 $\mathfrak{h}$ 中以原点为中心的平行多面体 $\tilde{Q}\subset Q$，使得(2.18)式定义的 $D_0(h)$当取 $h\in\tilde{Q}$ 时恒不等于零，且对每个 $h\in\mathfrak{h}$，存在唯一的 $\tilde{h}\in\tilde{Q}$ 和 $\eta\in\mathfrak{h}$，使得下式成立：

$$h=\eta+\tilde{h},\ \tilde{h}\in\tilde{Q},\exp\eta\in G \text{ 的中心}. \tag{3.72}$$

再取 $\mathfrak{g}$ 的 Weyl 基为

$$\{H_1,\cdots,H_q,X_\alpha,X_{-\alpha},\alpha\in\Sigma^+\}, \tag{3.73}$$

并对 $h\in\mathfrak{h}$ 置

$$\left.\begin{aligned}&\Sigma(h)=\{\alpha\in\Sigma,\alpha(h)=(\alpha,h)=2\pi \text{ 的整数倍}\},\\&\Sigma_h=\Sigma\backslash\Sigma(h),\Sigma^+(h)=\Sigma^+\cap\Sigma(h),\Sigma_h^+=\Sigma^+\backslash\Sigma_h.\end{aligned}\right\} \tag{3.74}$$

定义 3.4 设 $\mathfrak{g}$ 为紧致李代数，$\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个 Cartan 子代数，$\mathfrak{g}$ 的 Weyl 基由(3.73)式给出，并记 $h_\alpha=[X_\alpha,X_{-\alpha}]\in\mathfrak{h}$，$\alpha\in\Sigma^+$. 对于 $h\in\mathfrak{h}$，$\tilde{h}$ 由(3.72)式定义时，$\mathfrak{g}(h)$定义为 $\tilde{h}$ 在 $\mathfrak{g}$ 中的中心化子，而 $\mathfrak{g}(\Sigma_h)$为 $\mathfrak{g}(h)$在 $\mathfrak{g}$ 中的正交补空间. 特别当(2.18)式定义的 $D(h)\neq0$ 时，则有 $\mathfrak{g}(h)=\mathfrak{h}$，而 $\mathfrak{g}(\Sigma_h)$与 h 无关，简记为 $\mathfrak{g}(\Sigma)$. 再对每个 $\alpha\in\Sigma^+$，定义 $\mathfrak{g}$ 的也是 $\mathfrak{g}(\Sigma)$的二维实线性子空间 $\mathfrak{g}_\alpha$ 为 X_α、$X_{-\alpha}$在 $\mathfrak{g}$ 中张成的二维实线性子空间.

由引理 3.5 和定义 3.4，易证以下引理：

引理 3.6 设 $h\in\mathfrak{h}$，则对每个正整数 k，可取 $\mathfrak{g}$ 中适当的单位向量

$$Z_1,Z_2,\cdots,Z_m\in\mathfrak{g}(h);\ X_1,X_2,\cdots,X_r\in\mathfrak{g}(\Sigma_h)$$

使得 G 上的 l 阶左不变微分算子 $P_l(\tilde{X})$ $(0\leqslant l\leqslant k)$在适当选取系数 $C_{a,b,p,s}$时，可唯一的表示成

$$P_l(\tilde{X})=\sum_{0\leqslant a+b\leqslant l}\sum_{p=1}^{m}\sum_{s=1}^{r}C_{a,b,p,s}\tilde{Z}_p^aX_s^b,$$

且存在仅依赖于 G 和 l 的正数 C_l，使得

$$\left(\sum_{0\leqslant a+b\leqslant l}|C_{a,b,p,s}|^2\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant C_l\,\|P_l(\tilde{X})\|.$$

当 $h\in\mathfrak{h}$ 时，定义 3.4 中的 $\mathfrak{g}(h)$ 是 $\mathfrak{g}$ 的子代数，它对应的 G 的子群记为 $G(h)$. 于是有如下引理：

引理 3.7　设 $h\in\mathfrak{h}, Z\in\mathfrak{g}(h), X\in\mathfrak{g}(\Sigma_h), f\in C_l^\dagger(G)$，则有

$$(\tilde{Z}^a\tilde{X}^b f)(x)=(\tilde{H}^a\tilde{Y}^b f)(z),$$

其中 $H\in\mathfrak{h}, Y\in\mathfrak{g}(\Sigma_h)$，且存在 $y\in G(h)$，使得

$$H=Ady(Z),\ Y=Ady(X),\ z=y^{-1}xy.$$

证明　因为 $\mathfrak{g}(h)$ 是 $\mathfrak{g}$ 的紧致子代数，它的 Cartan 子代数也是 $\mathfrak{h}$，故对每个 $Z\in\mathfrak{g}(h)$ 必存在 $H\in\mathfrak{h}$ 和 $y\in G(h)$，使得 $H=Ady(Z)$. 又因为 $G(h)$ 是 G 的紧致子群，且 $AdG(h)$ 以 $\mathfrak{g}(h)$ 为不变子空间，从而 $\mathfrak{g}(\Sigma_h)$ 也是 $AdG(h)$ 的不变子空间，由中心函数的性质和左不变向量场对函数求导的定义，即可得到引理 3.7. ▌

由 G 中的元与 $T=\exp\mathfrak{h}$ 中的元的共轭性质，可得到

$$\begin{aligned}
&\exp h\exp tX\\
&\quad=y(t)\exp h(t)y(t)^{-1}\\
&\quad=\exp Ady(t)(h(t))\\
&\quad=\exp\{Ad\exp Z(t)(h(t))\}\\
&\quad=\exp\{\mathrm{Exp}\,adZ(t)(h(t))\},
\end{aligned}\tag{3.75}$$

其中 $y(t)=\exp Z(t), Z(t)\in\mathfrak{g}, h, h(t)\in\mathfrak{h}$，Exp 是矩阵指数映射.

引理 3.8　设 $h\in\mathfrak{h}$ 且 $\exp h$ 不是 G 的中心的元，$X\in\mathfrak{g}(\Sigma_h)$，则 (3.75) 式在 $t=0$ 附近存在唯一的实解析解：

$$Z(t)=tZ_1+\frac{1}{2}t^2Z_2+O(t^3),$$

$$h(t)=h+th_1+\frac{1}{2}t^2h_2+O(t^3),$$

其中 $Z_1\in\mathfrak{g}(\Sigma_h), Z(t), Z_2\in\mathfrak{g}(\Sigma); h(t), h_1, h_2\in\mathfrak{h}$. 且若记

$$X=\sum_{\alpha\in\Sigma_h^+}C_\alpha X(\alpha),\ X(\alpha)\in\mathfrak{g}_\alpha,\ |X(\alpha)|=1,\ \alpha\in\Sigma_h^+,\tag{3.76}$$

则有

$$h_1 = 0, h_2 = \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Sigma_h^+} C_\alpha^2 \operatorname{ctg}\frac{1}{2}\alpha(h)h_\alpha,$$

$$Z_1 = \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Sigma_h^+} C_\alpha E(h)_\alpha(X(\alpha)),$$

其中 $E(h)$是 $\mathfrak{g}$ 上的线性变换，以 $\mathfrak{h}$，$\mathfrak{g}_\alpha, \alpha\in\Sigma^+$ 为其不变子空间，$E(h)$在 $\mathfrak{g}_\alpha$ 上的限制记为 $E(h)_\alpha$，则当取 $X_\alpha=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$、$X_{-\alpha}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ 为坐标列向量时，$E(h)_\alpha$ 在基$\{X_\alpha, X_{-\alpha}\}$ $(\alpha\in\Sigma^+)$之下的阵为

$$E(h)_\alpha = \begin{bmatrix} -1 & -\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\alpha(h) \\ \operatorname{ctg}\frac{1}{2}\alpha(h) & -1 \end{bmatrix}.$$

特别当取(3.76)式中的 $X=X(\alpha)$时还有 $Z_2=0$.

证明 记 J、$C(h)$为 $\mathfrak{g}$ 上的线性变换，均以 $\mathfrak{h}$ 和 $\mathfrak{g}_\alpha(\alpha\in\Sigma^+)$为其不变子空间，限制在 $\mathfrak{h}$ 上，J 和 $C(h)$均等于零，限制在 $\mathfrak{g}_\alpha$ 上则记为 J_α 和 $C(h)_\alpha$，在基 $X_\alpha, X_{-\alpha}$之下它们的阵是

$$J_\alpha = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \ C(h)_\alpha = \alpha(h)I_\alpha,$$

其中 I_α 是 $\mathfrak{g}_\alpha$ 上的恒等变换. 这就可得到

$$\operatorname{ad}h = C(h)J = JC(h), \ C(h)J^2 = -C(h).$$

由 § 1.3 节的引理 1.2，又可得

$$\exp h \exp tX$$
$$= \exp\left\{h + tA(h)^{-1}(X) + \frac{1}{2}t^2B(h,X)(X) + O(t^3)\right\}, \tag{3.77}$$

其中

$$A(h) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k+1)!}(\operatorname{ad}h)^k,$$

$$B(h,X) = A(h)^{-1}C(h,X)A(h)^{-1}, \tag{3.78}$$

易见，$\mathfrak{h}$ 和 $\mathfrak{g}_\alpha$ $(\alpha\in\Sigma^+)$均为 $A(h)$的不变子空间. $A(h)$在 $\mathfrak{h}$ 上

的限制为恒等变换，$A(h)$在$\mathfrak{g}_\alpha$上的限制记为$A(h)_\alpha$，则在基X_α，$X_{-\alpha}$之下，$A(h)_\alpha$的阵是

$$A(h)_\alpha = \begin{bmatrix} \dfrac{\sin\alpha(h)}{\alpha(h)} & \dfrac{1-\cos\alpha(h)}{\alpha(h)} \\ \dfrac{\cos\alpha(h)-1}{\alpha(h)} & \dfrac{\sin\alpha(h)}{\alpha(h)} \end{bmatrix}.$$

由此可得当$D(h)\neq 0$，或者$h\in\tilde{Q}$时，$A(h)$为非奇异时，$A(h)^{-1}$有意义，且$\mathfrak{h}$和$\mathfrak{g}_\alpha(\alpha\in\Sigma^+)$也是$A(h)^{-1}$的不变子空间，$A(h)^{-1}$在$\mathfrak{g}_\alpha$上的限制记为$A(h)_\alpha^{-1}$，则有

$$A(h)_\alpha^{-1} = \frac{1}{2}\alpha(h)\begin{bmatrix} \operatorname{ctg}\dfrac{1}{2}\alpha(h) & -1 \\ 1 & \operatorname{ctg}\dfrac{1}{2}\alpha(h) \end{bmatrix}.$$

将引理中的$Z(t)$和$h(t)$的表达式代入(3.75)和(3.77)式中求解，因为$X\in\mathfrak{g}(\Sigma_h)$，则$A(h)^{-1}(X)\in\mathfrak{g}(\Sigma_h)$，比较(3.75)和(3.77)式的幂级数展式中的t和t^2的系数，可得

$$h_1 = 0,\ [Z_1,h] = A(h)^{-1}(X),$$

$$\begin{aligned} &B(h,X)(X) \\ &\quad = h_2 + [Z_2,h] + 2[Z_1,h_1] + (\mathrm{ad}Z_1)^2(h). \end{aligned}$$

记$Z_{1,\alpha}$为Z_1在$\mathfrak{g}_\alpha$ $(\alpha\in\Sigma_h^+)$中的正交投影，则有

$$\begin{aligned} [Z_1,h] &= -\sum_{\alpha\in\Sigma_h^+}\mathrm{ad}h(Z_{1,\alpha}) \\ &= -\sum_{\alpha\in\Sigma_h^+}\alpha(h)J_\alpha(Z_{1,\alpha}), \end{aligned}$$

$$A(h)^{-1}(X) = \sum_{\alpha\in\Sigma_h^+}C_\alpha A(h)_\alpha^{-1}(X(\alpha)).$$

由上面两式和$J_\alpha^2=-I_\alpha$，即可得

$$Z_{1,\alpha} = \frac{1}{2}C_\alpha E(h)_\alpha(X(\alpha)),\ \alpha\in\Sigma^+.$$

这就证明了引理中Z_1的表达式.

由(3.78)式及引理的条件可得到当$X=X(\alpha)$时$B(h,X)(X)$

$\in \mathfrak{h}$，因而 $D(h)\neq 0$ 或 $h\in\tilde{Q}$ 时有 $Z_2=0$. 而对一般的 $X\in \mathfrak{g}(\Sigma_h)$，记 H' 为 $B(h,X)(X)$ 在 $\mathfrak{h}$ 中的正交投影，则有

$$H' = h_2 + (\mathrm{ad}Z_1)^2(h).$$

用以上各式具体计算 H' 和 $(\mathrm{ad}Z_1)^2(h)$，得

$$\begin{aligned} H' &= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(k+1)!}\sum_{\alpha\in\Sigma_h^+}C_\alpha^2\alpha(h)^{k-1} \\ &\quad\times\left[A(h)^{-1}(X(\alpha)),J^{k-1}A(h)^{-1}(X(\alpha))\right] \\ &= \frac{1}{4}\sum_{\alpha\in\Sigma_h^+}C_\alpha^2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\alpha(h)^{2k+1} \\ &\quad\times\left[-J_\alpha E(h)_\alpha(X(\alpha)),E(h)_\alpha(X(\alpha))\right] \\ &= \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Sigma_h^+}C_\alpha^2\frac{\sin\alpha(h)-\alpha(h)}{1-\cos\alpha(h)}h_\alpha, \end{aligned}$$

$$(\mathrm{ad}Z_1)^2(h) = -\frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Sigma_h^+}C_\alpha^2\frac{\alpha(h)}{1-\cos\alpha(h)}h_\alpha.$$

由此即得当 $h\in\tilde{Q}$ 或 $D(h)\neq 0$ 时，引理中 h_2 的表达式成立. 即当 $h\in\tilde{Q}$或 $D(h)\neq 0$ 时，引理成立.

对一般的$h\in\mathfrak{h}$，由(3.72)式以及

$$\begin{aligned} \exp h\exp tX &= \exp\eta\cdot\exp\tilde{h}\cdot\exp tX \\ &= \exp\eta\cdot y(t)\cdot\exp\tilde{h}(t)\cdot y(t)^{-1} \\ &= y(t)\cdot\exp\eta\cdot\exp\tilde{h}(t)\cdot y(t)^{-1}, \end{aligned}$$

就证明了引理对一切的 $h\in\mathfrak{h}$ 且 $\exp h$ 不是 G 的中心的元及 $X\in \mathfrak{g}(\Sigma_h)$时成立. ▌

由引理 3.8 可以证明如下引理：

引理 3.9 设 $h\in\mathfrak{h}$，$f\in C_l^k(G)$，且

(1) 若 $k\geqslant 1$ 且 $X\in\mathfrak{g}(\Sigma)$，则有

$$(\tilde{X}f)(\exp h) = 0.$$

(2) 若 $k\geqslant 2$，$\alpha\in\Sigma^+$，$X\in\mathfrak{g}_\alpha$，且 $|X|=1$，则当 $\sin\frac{1}{2}\alpha(h)\neq 0$ 时，有

$$(\widetilde{X}^2 f)(\exp h) = \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\alpha(h)\boldsymbol{D}_\alpha f(\exp h);$$

而当 $\sin\frac{1}{2}\alpha(h)=0$ 时，对正整数 m 有

$$(\widetilde{X}^m f)(\exp h) = |h_\alpha|^{-m}\boldsymbol{D}_\alpha^m f(\exp h),$$

其中 $(\alpha,\alpha)=|h_\alpha|^2$，又对正整数 m，定义

$$\boldsymbol{D}_\alpha^m f(\exp h) = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^m f(\exp(h+th_\alpha))\bigg|_{t=0}.$$

(3) 若 $k\geqslant 2$，$\alpha\in\Sigma^+$，X_α，$X_{-\alpha}$ 由(3.73)式定义，则有

$$\begin{aligned}(\widetilde{X}_\alpha\widetilde{X}_{-\alpha}f)(\exp h) &= -(\widetilde{X}_{-\alpha}\widetilde{X}_\alpha f)(\exp h)\\ &= \frac{1}{2}\boldsymbol{D}_\alpha f(\exp h).\end{aligned}$$

(4) 若 $k\geqslant 2$，α、$\beta\in\Sigma$ 且 $\alpha\neq\pm\beta$，则有

$$(\widetilde{X}_\alpha\widetilde{X}_\beta f)(\exp h) = 0.$$

(5) 若 $k\geqslant l+1$ 且 $X\in\mathfrak{g}(\Sigma)$，又设

$$P_l(\widetilde{H}) = \sum_{|\alpha|\leqslant l} b_\alpha \widetilde{H}^\alpha,\quad P_l\left(\frac{\partial}{\partial h}\right) = \sum_{|\alpha|\leqslant l} b_\alpha\left(\frac{\partial}{\partial h}\right)^\alpha,$$

则有

$$(P_l(\widetilde{H})\widetilde{X}f)(\exp h) = (\widetilde{X}P_l(\widetilde{H})f)(\exp h) = 0;$$

而当 $k\geqslant l$ 时，则有

$$(P_l(\widetilde{H})f)(\exp h) = P_l\left(\frac{\partial}{\partial h}\right)f(\exp h).$$

证明　由引理 3.8，当 $D(h)\neq 0$ 且 $X\in\mathfrak{g}(\Sigma)$ 时，有

$$\begin{aligned}&f(\exp h\cdot\exp tX)\\ &\quad= f(y(t)\cdot\exp h(t)y(t)^{-1})\\ &\quad= f\left(\exp\left(h+\frac{1}{2}t^2h_2+O(t^3)\right)\right).\end{aligned}$$

在上式中，在 $t=0$ 处，作为 t 的函数对 t 求一阶或二阶导数，即得引理中的(1)和(2)当 $D(h)\neq 0$ 时成立. 再记

$$T^0 = \{\exp h, h\in\mathfrak{h}, D(h)\neq 0\},$$

则 T^0 是 G 的 Cartan 子群 $T=\exp\mathfrak{h}$ 的一个稠密开集. 由上面的结

果及 $f(\exp h)$关于 Weyl 群的对称性和 k 阶可微性，就证明了引理中的(1)和(2).

对引理的(3)和(4)，设

$$\exp h \exp tX = y(t)\exp h(t) y(t)^{-1},$$

则由引理 3.8 可得

$$y(t)^{-1}\exp uY y(t) = \exp(uY - tu[Z_1, Y] + O(t^2)),$$

由此可得

$$\begin{aligned} & f(\exp h \exp tX \exp uY) \\ & \quad = f(y(t)\exp h(t) y(t)^{-1} \exp uY) \\ & \quad = f(\exp h(t) y(t)^{-1} \exp uY y(t)), \end{aligned}$$

所以当 $y \in \mathfrak{h}$ 时，有

$$\begin{aligned} & (\tilde{X}\tilde{Y}f)(\exp h) \\ & = \frac{d}{dt}\frac{d}{du} f(\exp h(t)\exp(uY - tu[Z_1, Y])\Big|_{u=0,t=0} \\ & = -([\tilde{Z}_1, \tilde{Y}]f)(\exp h). \end{aligned} \tag{3.79}$$

将 $X = X_\alpha, Y = X_{-\alpha}; X = X_{-\alpha}, Y = X_\alpha; X = X_\alpha, Y = X_\beta$ 分别代入以上式中. 由引理 3.8 和上面已证的$(\tilde{X}f)(\exp h) = 0$ 的结果，就证明了引理的(3)和(4).

引理的(5)是引理的(1)和换位运算性质的自然推论. 于是完成了引理的证明. ▌

引理 3.10 设 $f \in C_l^{k+1}(G), h \in \mathfrak{h}, D(h) \neq 0, Y \in \mathfrak{g}, \alpha \in \Sigma^+$；又设

$$Q_k(\pm\alpha, \tilde{Y}) = \sum_{l=0}^{k-1} \tilde{Y}^l [\tilde{X}_{\pm\alpha}, \tilde{Y}] \tilde{Y}^{k-l-1},$$

$$\begin{aligned} P_k(\alpha, \tilde{Y}) = & \sin\frac{1}{2}\alpha(h) Q_k(\alpha, \tilde{Y}) \\ & - \cos\frac{1}{2}\alpha(h) Q_k(-\alpha, \tilde{Y}), \end{aligned}$$

$$P_k(-\alpha, \tilde{Y}) = \cos\frac{1}{2}\alpha(h) Q_k(\alpha, \tilde{Y})$$

$$+\sin\frac{1}{2}\alpha(h)Q_k(-\alpha,\tilde{Y}),$$

则有

$$(\tilde{X}_\alpha\tilde{Y}^k f)(\exp h)=\frac{1}{\sin\frac{1}{2}\alpha(h)}(P_k(\alpha,\tilde{Y})f)(\exp h),$$

$$(\tilde{X}_{-\alpha}\tilde{Y}^k f)(\exp h)=\frac{1}{\sin\frac{1}{2}\alpha(h)}(P_k(-\alpha,\tilde{Y})f)(\exp h).$$

证明　由前面引理3.9证明中的(3.79)式可得

$$\begin{aligned}
&(\tilde{X}\tilde{Y}^k f)(\exp h)\\
&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\right)^k f(\exp h\exp tX\exp uY)\Big|_{u=0,t=0}\\
&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\right)^k f(\exp h(t)\exp u(Y-[tZ_1,Y]))\Big|_{u=0,t=0}\\
&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}((\tilde{Y}-t[\tilde{Z}_1,\tilde{Y}])^k f)(\exp h(t))\Big|_{t=0}.
\end{aligned}$$

在上式中取 $X=X_\alpha$ 或 $X=X_{-\alpha}$ 时，用引理3.8分别计算 Z_1，就得到本引理.　∎

引理3.11　设 $f\in C_1^\infty(G)$，则对每个 k 阶左不变微分算子 $P_k(\tilde{X})$ 和 $x\in G$，存在着 k 阶常系数微分算子 $Q_k(\tilde{X})$，使得

$$(P_k(\tilde{X})f)(x)=(Q_k(\tilde{X})f)(\exp h(x)).$$

其中 $x=y\exp h(x)y^{-1}$，$h(x)\in\mathfrak{h}$，且存在仅依赖于 G 和 k 的正数 A_k，使下式成立：

$$\|Q_k(\tilde{X})\|\leqslant A_k\|P_k(\tilde{X})\|.$$

证明　由引理3.5可设

$$P_k(\tilde{X})=\sum_{p,r}a_{pr}\tilde{Z}_r^p.$$

又对任意的 $X\in\mathfrak{g}$，$1\leqslant l\leqslant k$，有

$$(\tilde{X}^l f)(x)=\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^l f(x\exp tX)\Big|_{t=0}$$

$$= \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^l f(y\exp h(x)y^{-1}\exp tX)\Big|_{t=0}$$

$$= \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^l f(\exp h(x)y^{-1}\exp tXy)\Big|_{t=0}$$

$$= \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^l f(\exp h(x)\exp tAdy^{-1}(X))\Big|_{t=0}.$$

现令 $Y=Ady^{-1}(X)$，则上式就变成

$$(\widetilde{X}^l f)(x) = (\widetilde{Y}^l f)(\exp h(x)).$$

因此若记

$$Y_r = Ady^{-1}(Z_r),\ r = 1,2,\cdots,s, \tag{3.80}$$

则由(3.69)式就有

$$(P_k(\widetilde{X})f)(x) = \sum_{p,r} a_{pr}(\widetilde{Y}_r^p f)(\exp h(x)).$$

即有

$$Q_k(\widetilde{X}) = \sum_{p,r} a_{pr}\widetilde{Y}_r^p,$$

$$Y_r = Ady^{-1}(Z_r),\ r = 1,2,\cdots,s.$$

仍然用引理 3.5 证明中所用的记号. 由引理 3.5 证明中给出的一一对应

$$\pi_k:\{Z_j\} \to \{z_{jr}\}$$

可知，对每个 $y\in G$，Ady 在 $\mathfrak{g}$ 上的作用自然诱导了 $R^{l\times n}$ 上的一个正交变换 $\Gamma(y)$，使得当 $\{Z_j\}$ 和 $\{Y_j\}$ 适合(3.80)式时，记

$$\{z_{jr}\} = \pi_k(\{Z_j\}),\quad \{y_{jr}\} = \pi_k(\{Y_j\}),$$

则有

$$\{y_{jr}\} = \Gamma(y)^{-1}(\{z_{jr}\}).$$

记 $F_k(y)=\Gamma(y)(F_k)$，则 $\{y_{jr}\}\overline{\in} F_k$ 的充分必要条件是 $\{z_{jr}\}\overline{\in} F_k(y)$. 因此若取

$$\{z_{jr}\} \in \Omega_k\backslash(F_k \cup F_k(y)),$$

则 Z_j、Y_j 均为 $\mathfrak{g}$ 中的单位向量，且 $\{Z_j\}$ 和 $\{Y_j\}$ 按照(3.70)式产生的 $\{\widetilde{Z}_j^l\}$ 和 $\{\widetilde{Y}_j^l\}$ 都是 $\chi_k(G)$ 的基.

取(3.71)式后面定义的 Ω_k 的紧子集 E_k 为

$$E_k = \{\{z_{jr}\} \in \Omega_k,\ \mathrm{d}(\{z_{jr}\},F_k) \geqslant \varepsilon_k > 0\},$$

其中 $\mathrm{d}(\cdot,\cdot)$ 表示 $R^{s\times n}$ 中两点间的欧氏距离. 而由引理 3.5 的证明可知,对任一 $\{z_{jr}\}\in E_k$,有 $\{Z_j\}=\pi_k^{-1}\{z_{jr}\}$ 使得引理 3.5 成立,且引理的不等式中的正数 b_k 和 B_k 仅依赖于 G、k 和 ε_k. 又因为 F_k 是 $R^{s\times n}$ 中的 k 个伸缩不变的曲面的并集,所以存在仅由 G 决定的正整数 N_0,使得对每个 $y\in G$,$\Omega_k\backslash(F_k\cup F_k(y))$ 是 Ω_k 的不超过 N_0 个的开集之并. 这就表明了:存在仅由 G 和 k 决定的正数 $\varepsilon_k>0$,使得 E_k 含有 Ω_k 的非空开集,且对每个 $y\in G$,存在着 $\{z_{jr}\}\in E_k$,使得

$$\mathrm{d}(\{z_{jr}\},F_k(y)) \geqslant \varepsilon_k.$$

因此,对每个 $y\in G$,存在 $\{Z_j\}$ 和 $\{Y_j\}$ 适合(3.80)式,且使得引理3.5成立. 而由引理 3.5 对应于 $\{Z_j\}$ 和 $\{Y_j\}$ 的两个不等式,就可推出引理 3.11 中要证明的不等式,这就完成了引理 3.11 的证明. ▌

现在将 $\mathfrak{g}$ 的正根系 Σ^+ 记为

$$\Sigma^+ = \{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_b\}, \tag{3.81}$$

其中 $b=\frac{1}{2}(\dim G-\operatorname{rank} G)=\frac{1}{2}(n-q)$. 再设

$$x = (x_1,\cdots,x_b) \in R^b,$$

并记 $x(h)$ 为

$$x(h) = (x_1(h),\cdots,x_b(h)), \tag{3.82}$$

适合

$$x_j(h) = \operatorname{ctg}\frac{1}{2}\alpha_j(h),\ \ j=1,2,\cdots,b. \tag{3.83}$$

又记 $\mathbf{Z}_+^k$ 为 k 维欧氏空间中非负整格点全体的集,则有如下引理:

引理 3.12　设 $f\in C_I^\infty(G)$,则每个 G 上的 k 阶左不变微分算子 $P_k(\widetilde{X})$ 唯一地对应了 $T=\exp\mathfrak{h}$(亦即 $\mathfrak{h}$)上的 k 阶微分算子 $Q_k\left(h,\left(\frac{\partial}{\partial h}\right)\right)$,使得当 $D(h)\neq 0$ 时,对一切 $h\in\mathfrak{h}$ 恒有下式成立:

$$(P_k(\widetilde{X})f)(\exp h) = Q_k\left(h,\frac{\partial}{\partial h}\right)f(\exp h),$$

且 $Q_k\left(h,\frac{\partial}{\partial h}\right)$ 具有如下的表达式:

$$Q_k\left(h,\frac{\partial}{\partial h}\right)=\sum_{|\beta|\leqslant k,\beta\in \mathbf{Z}_+^{\,l}} b_\beta(h)\left(\frac{\partial}{\partial h}\right)^\beta,$$

其中

$$b_\beta(h)=\sum_{|\gamma|\leqslant k-|\beta|,\gamma\in \mathbf{Z}_+^{b}} C_{\beta,\gamma}x(h)^\gamma,$$

$C_{\beta,\gamma}$是适当的实常数，$x(h)$由(3.82)和(3.83)式给出，$x(h)^\gamma=x_1(h)^{\gamma_1}\cdots x_b(h)^{\gamma_b}_0$.

证明 由引理 3.9 可得引理 3.12 对 $k=0,1,2$ 均成立. 由归纳法设引理 3.12 对 k 成立，考虑 $k+1$ 的情形：

对 $P_{k+1}(\widetilde{X})\in\chi_{k+1}(G)$，由引理 3.5 有

$$P_{k+1}(\widetilde{X})=\sum_{p=0}^{k+1}\sum_{r=0}^{s}a_{pr}\widetilde{Z}_r^p.$$

因此只需对 $Y\in\mathfrak{g}$ 证明在归纳假设下，引理对 $\widetilde{Y}^{k+1}$成立. 设

$$Y=H+\sum_{\alpha\in\Sigma^+}(a_\alpha X_\alpha+b_\alpha X_{-\alpha}),\ H\in\mathfrak{h},$$

则有

$$\widetilde{Y}^{k+1}=\widetilde{H}\widetilde{Y}^k+\sum_{\alpha\in\Sigma^+}(a_\alpha\widetilde{X}_\alpha\widetilde{Y}^k+b_\alpha\widetilde{X}_{-\alpha}\widetilde{Y}^k).$$

由于

$$\begin{aligned}&(\widetilde{H}\widetilde{Y}^kf)(\exp h)\\&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\right)^kf(\exp(h+tH)\exp uY)\Big|_{u=0,t=0}\\&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\widetilde{Y}^kf)(\exp(h+tH))\Big|_{t=0},\end{aligned}$$

由归纳假设，设

$$(\widetilde{Y}^kf)(\exp h)=R_k\left(h,\frac{\partial}{\partial h}\right)f(\exp h),$$

则前面一式就变成

$$\begin{aligned}&(\widetilde{H}\widetilde{Y}^kf)(\exp h)\\&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}R_k\left(h+tH,\frac{\partial}{\partial h}\right)f(\exp(h+tH))\Big|_{t=0}\end{aligned}$$

$$= R_k\left(h, \frac{\partial}{\partial h}\right) D_H f(\exp h) + R_{k+1}\left(h, \frac{\partial}{\partial h}\right) f(\exp h),$$

其中

$$R_{k+1}\left(h, \frac{\partial}{\partial h}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} R_k\left(h + tH, \frac{\partial}{\partial h}\right)\Big|_{t=0}.$$

这表明：对任一 $Y \in \mathfrak{g}$，在归纳假设下，引理 3.12 对 $\tilde{Y}^{k+1}$ 成立. 再由引理 3.5 即可得到：在 k 成立的归纳假设下，引理 3.12 对 $k+1$ 必成立. 引理 3.12 得证． ▌

有了上面的准备，就可证明定理 3.3 和定理 3.4.

定理 3.3 的证明：

由定义 3.3 和定理 3.3 的条件，有

$$\begin{aligned}
&(D_{Y_1} D_{Y_2} \cdots D_{Y_s} f)(m) \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t_1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t_2} \cdots \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t_s} f(p(m) \exp t_1 Y_1 \cdots \\
&\quad \times \exp t_s Y_s \cdot o)\Big|_{t_s = \cdots = t_1 = 0} \\
&= \int_K \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t_1} \cdots \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t_s} F(p(m) \exp t_1 Y_1 \cdots \\
&\quad \times \exp t_s Y_s k) \mathrm{d}k \Big|_{t_s = \cdots = t_1 = 0}.
\end{aligned}$$

再由 F 的中心函数的性质和左不变向量场的性质，上式就变成

$$\begin{aligned}
&(D_{Y_1} D_{Y_2} \cdots D_{Y_s} f)(m) \\
&= \int_K \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t_1} \cdots \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t_s} F(kp(m) \exp t Y_1 \cdots \\
&\quad \times \exp t Y_s) \mathrm{d}k \Big|_{t_s = \cdots = t_1 = 0} \\
&= \int_K (\tilde{Y}_1 \cdots \tilde{Y}_s F)(kp(m)) \mathrm{d}k.
\end{aligned}$$

直接估计上式，就使定理 3.3 得证. ▌

定理 3.4 的证明：

当 $\exp\eta$ 属于 G 的中心时，令

$$f_\eta(x) = f(\exp\eta x),$$

则 $f\in C_l^k(G)$ 等价于 $f_\eta\in C_l^k(G)$. 而由(3.72)式，当 $h=\eta+\tilde{h}$ 时，显然有

$$(P_k(\tilde{X})f)(\exp h) = (P_k(\tilde{X})f_\eta)(\exp\tilde{h}).$$

这就表明：只要对 $f\in C_l^k(G)$ 和 $h\in\tilde{Q}$ 证明定理成立，就证明了当 $f\in C_l^k(G)$ 和 $h\in\mathfrak{h}$ 时，定理成立.

当 $D(h)\neq 0$ 时，由引理 3.12 可得

$$(P_k(\tilde{X})f)(\exp h)$$
$$= \sum_{\substack{|\beta|\leqslant k\\|\gamma|\leqslant k-|\beta|}} C_{\beta,\gamma}x(h)^\gamma\left(\frac{\partial}{\partial h}\right)^\beta f(\exp h), \qquad (3.84)$$

其中 $x(h)$ 由(3.82)式和(3.83)式给出. 记

$$y_j(h) = \alpha_j(h)\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\alpha_j(h),$$

$$z_j(h) = 1/\alpha_j(h), j = 1,\cdots,b,$$

再记

$$y(h) = (y_1(h),\cdots,y_b(h)),$$

$$z(h) = (z_1(h),\cdots,z_b(h)),$$

则对 $\gamma\in\mathbf{Z}_+^b$ 有

$$x(h)^\gamma = y(h)^\gamma z(h)^\gamma \equiv (y_1(h)z_1(h),\cdots,y_b(h)z_b(h))^\gamma.$$

又记 Ω 是 $\mathfrak{h}$ 中以原点为中心的单位球面，每个 $h\in\mathfrak{h}$ 可唯一表示成

$$h = t\omega,\ \omega\in\Omega,\ t = |h|,$$

则可将(3.84)式写成

$$(P_k(\tilde{X})f)(\exp h)$$
$$= (P_k(\tilde{X})f)(\exp t\omega)$$
$$= \sum_{\substack{|\beta|\leqslant k\\|\gamma|\leqslant k-|\beta|}} C_{\beta,\gamma}z(\omega)^\gamma y(t\omega)^\gamma\left(\frac{\partial}{\partial h}\right)^\beta f(\exp t\omega)/t^{|\gamma|}$$
$$= R_k\left(\frac{\partial}{\partial h}\right)f(\exp t\omega) + \sum_{\substack{1\leqslant|\beta|\leqslant k\\1\leqslant|\gamma|\leqslant k-|\beta|}} C_{\beta,\gamma}z(\omega)^\gamma R_{\beta,\gamma}(t\omega)/t^{|\gamma|},$$
$$(3.85)$$

其中
$$R_k\left(\frac{\partial}{\partial h}\right)=\sum_{|\alpha|\leqslant k}b_\alpha\left(\frac{\partial}{\partial h}\right)^\alpha,$$
b_α 是适当的实常数;
$$R_{\beta,\gamma}(t\omega)=y(t\omega)^\gamma\left(\frac{\partial}{\partial h}\right)^\beta f(\exp t\omega).$$

注意到可适当选取 $\tilde{Q}$ 使(3.72)成立,且对于 $1<r<2$,$D_0(h)$ 在 $r\tilde{Q}$ 也恒不为零.因此当 $h\in\tilde{Q}$ 时,(3.85)式中的 $y(t\omega)^\gamma=y(h)^\gamma$ 的各阶偏导数均在 $\tilde{Q}$ 上有界.因此当 $h=t\omega\in\tilde{Q}$,$D(h)\neq 0$ 时,可将 $R_{\beta,\gamma}(t\omega)$ 在 $\tilde{Q}$ 上用 Taylor 公式展开为
$$R_{\beta,\gamma}(t\omega)=\sum_{p=0}^{|\gamma|-1}\frac{t^p}{p!}(D_\omega^pR_{\beta,\gamma})(0)+\frac{t^{|\gamma|}}{|\gamma|!}(D_\omega^{|\gamma|}R_{\beta,\gamma})(\theta_{\beta,\gamma}t\omega),$$
其中 $0<\theta_{\beta,\gamma}<1$,
$$(D_\omega^pR_{\beta,\gamma})(h)=\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^pR_{\beta,\gamma}(h+t\omega)\bigg|_{t=0}.$$

将上面的 Taylor 展开式代入(3.85)式中,则得到
$$\begin{aligned}(P_k(\tilde{X})f)(\exp h)&=(P_k(\tilde{X})f)(\exp t\omega)\\&=R_k\left(\frac{\partial}{\partial h}\right)f(\exp h)\\&\quad+\sum_{\substack{1\leqslant|\beta|\leqslant k\\1\leqslant|\gamma|\leqslant k-|\beta|}}C_{\beta,\gamma}z(\omega)^\gamma\frac{1}{|\gamma|!}(D_\omega^{|\gamma|}R_{\beta,\gamma})(\theta_{\beta,\gamma}t\omega)\\&\quad+P(t)/t^{k-1},\end{aligned}$$
其中 $P(t)$ 是 t 的 $k-2$ 次的多项式.

当 $1<r<2$ 时,(3.85)式在 $h\in r\tilde{Q}$ 上连续,因此当 $h=t\omega\in\tilde{Q}$ 且 $D(h)\neq 0$ 时,必有正数 $a_G>0$,使得(3.85)式右端在 $|t|<a_G$ 上有界.这表明了上式中的 $P(t)$ 必然恒等于零.

由此可得:当 $h=t\omega\in\tilde{Q}$,且 $D(h)\neq 0$ 时有
$$(P_k(\tilde{X})f)(\exp h)=(P_k(\tilde{X})f)(\exp t\omega)$$

$$= R_k\left(\frac{\partial}{\partial h}\right) f(\exp h)$$

$$+ \sum_{\substack{1 \leqslant |\beta| \leqslant k \\ 1 \leqslant |\gamma| \leqslant k-|\beta|}} C_{\beta,\gamma} \frac{z(\omega)^\gamma}{|\gamma|!} (D_\omega^{|\gamma|} R_{\beta,\gamma})(\theta_{\beta,\gamma} t\omega). \qquad (3.86)$$

适当选取 $\varepsilon_0>0$，这时以下两种情形之一必然成立：

(1) $|\alpha_j(\omega)| \geqslant \varepsilon_0, j=1,2,\cdots,b$；

(2) 某些 $|\alpha_j(\omega)| \geqslant \varepsilon_0$，某些 $|\alpha_j(\omega)| < \varepsilon_0$.

先讨论情形(1)：令

$$b_k = \sup_{\substack{h=t\omega\in Q \\ \alpha \leqslant |\gamma| \leqslant k-1}} \left\{ \left| \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^\alpha y(t\omega)^\gamma \right| \right\},$$

$$\| f(\exp \cdot) \|_k = \sup_{|\alpha| \leqslant k} \left\{ \left\| \left(\frac{\partial}{\partial h}\right)^\alpha f(\exp \cdot) \right\|_\infty \right\}.$$

则当 $h=t\omega\in\bar{Q}, D(h)\neq 0$，且 ω 适合情形(1)时，(3.86)式有以下的估计：

$$\begin{aligned}
|(P_k(\bar{X})f)(\exp h)| &= |(P_k(\bar{X})f)(\exp t\omega)| \\
&\leqslant \left(\sum_{|\alpha| \leqslant k} |b_\alpha| + \sum_{\substack{1 \leqslant |\beta| \leqslant k \\ 1 \leqslant |\gamma| \leqslant k-|\beta|}} |C_{\beta,\gamma}| \frac{2^{|\gamma|} q^{|\gamma|} b_k}{\varepsilon_0^{|\gamma|} |\gamma|!} \right) \\
&\quad \times \| f(\exp \cdot) \|_k \\
&\leqslant \left(\frac{2q}{\varepsilon_0}\right)^k b_k \left(\sum_{|\alpha| \leqslant k} |b_\alpha| + \sum_{\substack{1 \leqslant |\beta| \leqslant k \\ 1 \leqslant |\gamma| \leqslant k-|\beta|}} |C_{\beta,\gamma}| \right) \\
&\quad \times \| f(\exp \cdot) \|_k \\
&= \left(\frac{2q}{\varepsilon_0}\right)^k b_k a_k \| P_k(\bar{X}) \| \cdot \| f(\exp \cdot) \|_k,
\end{aligned}$$

其中 $a_k>0$ 仅依赖于 G 和 k.

再讨论情形(2)：设 $\Sigma^+(0)$ 是所有适合 $|\alpha_j(\omega)|<\varepsilon_0$ 的正根 α_j 的集.

$$\mathfrak{h}(0) = \{h \in \mathfrak{h}, \alpha(h) = 0, \alpha \in \Sigma^+(0)\}.$$

则 $\dim\mathfrak{h}(0)<q$. 对于 $\omega\in\Omega$，令 ω_1 是 ω 在 $\mathfrak{h}(0)$ 中的正交投影，$\omega=\omega_1+\eta_1$，ω_1 与 η_1 正交，且只要 ε_0 取得适当小，例如取 $\varepsilon_0=1/10b$，就

有

$$\frac{1}{2} \leqslant |\omega_1| < 1.$$

再令 $\omega_2 = \eta_1/|\eta_1|$，则有

$$t\omega = t\omega_1 + u\omega_2,\ \ u = |\eta_1| t.$$

若对 $\alpha \in \Sigma^+(0)$ 恒有 $|\alpha(\omega_2)| \geqslant \varepsilon_0$，则以上分解就终止了. 否则，必有某些 $\alpha \in \Sigma^+(0)$，使得 $|\alpha(\omega_2)| \geqslant \varepsilon_0$，又有某些 $\alpha \in \Sigma^+(0)$，使得 $|\alpha(\omega_2)| < \varepsilon_0$. 则可对 ω_2 继续进行分解. 一般地必有 $1 \leqslant l \leqslant q$，使得

$$h = t\omega = u_1\omega_1 + u_2\omega_2 + \cdots + u_l\omega_l$$

成立，适合 $\frac{1}{2} \leqslant |\omega_j| \leqslant 1$；且 ω_j 彼此正交；$|u_j| \neq 0$. 而 Σ^+ 又有对应的分解：

$$\Sigma^+ = \Sigma^+(1) \cup \Sigma^+(2) \cup \cdots \cup \Sigma^+(l),$$

适合每个 $\Sigma^+(j)$ 非空；且 $\Sigma^+(j)$ 互不相交；若 $\alpha \in \Sigma^+(p)$，则当 $1 \leqslant j \leqslant p-1$ 时 $\alpha(\omega_j) = 0$，又有 $|\alpha(t\omega)| \geqslant u_p \varepsilon_0$.

因此(3.85)式相应地变成

$$\begin{aligned}
&(P_k(\bar{X})f)(\exp h) \\
&= (P_k(\bar{X})f)(\exp t\omega) = (P_k(\bar{X})f)(\exp \Sigma u_j\omega_j) \\
&= R_k\left(\frac{\partial}{\partial h}\right) f(\exp h) \\
&\quad + \sum_{\substack{1 \leqslant |\beta| \leqslant k \\ 1 \leqslant |\gamma| \leqslant k - |\beta|}} C_{\beta,\gamma} \tilde{z}(\omega)^\gamma R_{\beta,\gamma}(\Sigma u_j\omega_j)/(u_1^{a_1}\cdots u_l^{a_l}), \quad (3.87)
\end{aligned}$$

其中 $a_1 + a_2 + \cdots + a_l = |\gamma|$，$|\tilde{z}(\omega)^\gamma| \leqslant (1/\varepsilon_0)^{|\gamma|}$.

类似于从(3.85)式到(3.86)式的变化，先固定 $u_2, \cdots, u_l$，看作 u_1 的函数得到关于 u_1 的相应的(3.86)式. 再固定 $u_1, u_3, \cdots, u_l$，看作 u_2 的函数在以上变化的基础上又得到相应的(3.86)式，依此递推，可得到当 $h \in \bar{Q}$，$D(h) \neq 0$，且

$$h = u_1\omega_1 + \cdots + u_l\omega_l$$

具有以上所述的性质时，就有

$$(P_k(\bar{X})f)(\exp h)$$

$$= R_k\left(\frac{\partial}{\partial h}\right) f(\exp h)$$

$$+ \sum_{\substack{1\leqslant|\beta|\leqslant k\\ 1\leqslant|\gamma|\leqslant k-|\beta|}} C_{\beta,\gamma} \frac{\widetilde{z}(\omega)^{\gamma}}{a_1 ! \cdots a_l !}\left(D_{\omega_1}^{a_1}\cdots D_{\omega_l}^{a_l} \quad R_{\beta,\gamma}\right)(\xi_{\beta,\gamma}).$$

其中 $a_1+\cdots+a_l=|\gamma|$，

$$\xi_{\beta,\gamma} = \theta^1_{\beta,\gamma}u_1\omega_1 + \theta^2_{\beta,\gamma}u_2\omega_2 + \cdots + \theta^l_{\beta,\gamma}u_l\omega_l,$$

适合 $0<\theta^i_{\beta,\gamma}<1$.

由此易证，当 $h\in\widetilde{Q}, D(h)\neq 0$ 时，有

$$|(P_k(\widetilde{X})f)(\exp h)|$$

$$\leqslant \left(\frac{2q^l}{\varepsilon_0}\right)^k b_k a_k \| P_k(\widetilde{X}) \| \cdot \| f(\exp \cdot) \|_k$$

$$\leqslant \left(\frac{2q^q}{\varepsilon_0}\right)^k b_k a_k \| P_k(\widetilde{X}) \| \cdot \| f(\exp \cdot) \|_k. \tag{3.88}$$

其中 q, k, a_k, b_k 仅依赖于 G 和 k. 取定理中的 A_k 为

$$A_k = (2q^q/\varepsilon_0)^k b_k a_k.$$

再讨论 $h\in\widetilde{Q}, D(h)=0$ 的情形：当 $\exp h\in Z(G)$，$Z(G)$ 是 G 的中心且 $h\in\widetilde{Q}$ 时，由引理 3.5 和

$$\exp tY = y\exp h(Y)y^{-1},$$

其中 $h(Y)\in\mathfrak{h}$，$|h(Y)|=|Y|$，就容易验证(3.88)式的最后估计式成立. 当 $\exp h\overline{\in}Z(G)$，$h\in\widetilde{Q}$，$D(h)=0$ 时，由引理 3.6 和引理 3.7，将(3.81)式中的 Σ^+ 换成 Σ_h^+，并将由此得到的 $x(h)$ 用于引理 3.12 的证明及定理 3.4 直到(3.88)式的各个证明中，可得(3.88)式的最后估计对此也成立. 即(3.88)式对一切 $h\in\widetilde{Q}$ 成立. 而对一般的 $h\in\mathfrak{h}$，由(3.84)式前面的说明，及(3.72)式成立时 $\| f(\exp\cdot)\|_k = \| f_q(\exp\cdot)\|_k$，就最终证明了定理 3.4. ▌

3.1.6 非切向收敛与非切向有界

对于 $f\in S'(M)$，记

$$u(t,m) = P_t * f(m), \tag{3.89}$$

则作为 $R_+\times M$ 上的函数，$u(t,m)$ 适合 Laplace 方程

$$\left(\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 + \Delta\right)u(t,m) \equiv 0, \tag{3.90}$$

其中，Δ 是 M 上的 Laplace-Beltrami 算子. 通常称 $u(t,m)$ 是 $R_+\times M$ 上的调和函数，它具有与欧氏空间上的调和函数相似的许多性质.

为了描述 $R_+\times M$ 上的由(3.90)式定义的调和函数的性质，先给出定义如下：

定义 3.5　如果 Ω 微分同胚于 $l=\dim M$ 维欧氏空间中一个具有连续的且分片 c^2 的边界的有界闭区域，且对 M 的 Laplace-Beltrami 算子 Δ，对任意取定的 $m\in\Omega$，将 $d(n,m)$ 看作 $n\in\Omega$ 的函数时，有

$$\inf_{m,n\in\Omega}\{\Delta(\mathrm{d}(\cdot,m)^2)(n)\}\geqslant b_0>0 \tag{3.91}$$

成立. 则称 Ω 为 Riemann 流形 M 的一个正则的有界闭区域.

称 E 是 $R_+\times M$ 中的一个正则的有界闭区域，是指 E 微分同胚于 $l+1$ 维欧氏空间中一个具有连续的且分片 c^2 的边界的有界闭区域，且

$$E=\bigcup_{a\leqslant t\leqslant b}\Omega(t),$$

其中

$$\Omega(t)=\{n\in M,(t,n)\in E\}$$

是 M 的正则的有界闭区域.

引理 3.13　设 E 是 $R_+\times M$ 中的一个正则的有界闭区域，则每个由(3.89)式定义的调和函数 $u(t,m)$ 必在 E 的边界上达到最大值和最小值.

证明　只需证明 $u(t,m)$ 在 E 的边界 ∂E 上达到最大值. 用反证法：若不然，令

$$A=\sup_{(t,m)\in E}\{u(t,m)\},\quad u(t_0,m_0)=A,$$

$$B=\sup_{(t,m)\in\partial E}\{u(t,m)\},$$

则 $A>B$. 作 E 上的函数

$$V_\varepsilon(t,m)=u(t,m)+\varepsilon\mathrm{d}(m,m_0)^2,$$

因为在 E 上 $\mathrm{d}(m,m_0)$ 有界，从而当 $\varepsilon>0$ 适当小时，就有

$$\sup_{(t,m)\in\partial E}\{V_\varepsilon(t,m)\}<A.$$

但是对E的内点(t_0,m_0)，则有

$$V_\varepsilon(t_0,m_0)=u(t_0,m_0)=A.$$

从而必存在E的内点(t_1,m_1)，使得

$$V_\varepsilon(t_1,m_1)=\sup_{(t,m)\in E}\{V_\varepsilon(t,m)\}.$$

于是必有

$$\left(\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^2V_\varepsilon\right)(t_1,m_1)\leqslant 0,\ \ (\Delta V_\varepsilon)(t_1,m_1)\leqslant 0,$$

即有

$$\left(\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^2+\Delta\right)V_\varepsilon(t_1,m_1)\leqslant 0.$$

而由$V_\varepsilon(t,m)$的表达式，此即

$$(\Delta d(\cdot,m_0)^2)(m_1)\leqslant 0.$$

这与E是正则的有界闭区域从而(3.91)式成立相矛盾. 于是引理成立. ▌

引理3.13的证明实际上只用到$u(t,m)$适合(3.90)式，和Riemann流形M上的距离函数的性质. 对一个Riemann流形M，在每一点$m\in M$，必然存在一个适合定义3.5的区域Ω，使m是Ω的内点，且(3.91)式成立. 而对齐性Riemann流形来说，只要Ω在一点$m_0\in M$满足定义3.4，则在等度量变换下，每一点$m\in M$都有一个与Ω等距同构的区域Ω_m，使m是Ω_m的内点且(3.91)式成立.

命题3.1 设M是紧致齐性空间，$E_a(a>0)$是$R_+\times M$的子域$[a,+\infty)\times M$. 设$u(t,m)$在E_a的内点(t_1,m_1)处达到最大值或最小值，则$u(t,m)$必为$R_+\times M$上的常值函数，由此可得到$P_t(m)$是正核.

证明 因为M是紧致的，又因为$C^\infty(M)$上的任意一个广义函数$f\in S'(M)$必适合(1.115)式，从而$u(t,m)$在E_a上有界. 此即$V(t,m)=u(t+a,m)$是$R_+\times M$上的有界调和函数. 当$u(t,m)$在lE_a的内点(t_1,m_1)处达到最大值或最小值时，只需考虑最大值

$$u(t_1,m_1)\geqslant u(t,m),\ \ (t,m)\in E_a$$

的情形. 这时，由引理3.13的证明易见，在点(t_1,m_1)处$u(t,m)$的

所有一阶偏导数都等于零，而在(t,m_1)处$u(t,m)$二阶偏导数的Hessian 矩阵必是半定负的. 因为在(t_1, m_1)邻域内$\left(\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^2+\Delta\right)u(t,m)=0$，从而必存在$(t_1,m_1)$的一个邻域，使得在这个邻域上

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 u(t,m) \equiv 0, \quad \Delta u(t,m) \equiv 0$$

恒成立. 特别是存在M在m_1点的邻域，使得

$$\Delta u(t_1,m) = 0$$

在这一邻域内恒成立. 因为$t_1>a>0$，$u(t_1,m)$在M上为实解析，从而$\Delta u(t_1,m)$在M上也为实解析，于是由实解析延拓的唯一性，必有$\Delta u(t_1,m)\equiv 0$在M上成立. 但在M上适合$(\Delta f)(m)\equiv 0$的函数只有常值函数，从而$u(t_1,m)\equiv u(t_1,m_1)=$常数，由(3.89)式即得到$f(m)\equiv u(t_1,m_1)$，于是$u(t,m)$在$R_+\times M$上恒等于常数. 由这一结果，若$P_t(m)$存在一点$(t_1,m_1)$使$P_{t_1}(m_1)<0$成立. 则就可构造一个不恒等于常数的调和函数$P_t*f(m)$在$t_0>0, m_0\in M$的点$(t_0,m_0)$处适合$u(t_0,m_0)\leqslant u(t,m)$，$(t,m)\in R_+\times M$. 这与上面的结论相矛盾. 这就证明了$P_t(m)$是非负的. 如果存在$t_1>0$和$m_1\in M$，使得$P_{t_1}(m_1)=0$，取$0<a<t_1$，由$P_t(m)$的非负性，它在$E_a$的内点达到最小值零，由以上的证明，$P_t(m)$必须是常值函数，这显然是矛盾的，从而$P_t(m)>0$对一切$(t,m)\in R_+\times M$均成立，即$P_t(m)$是正核. 于是命题 3.1 得证. ▌

通常称适合(3.90)式的$R_+\times M$上的函数$u(t,m)$为$R_+\times M$上的调和函数，它与(3.89)式的差别是：若$u(t,m)$适合(3.90)式，则必存在$f\in S'(M)$和常数c，使得

$$u(t,m) = P_t * f(m) + ct. \tag{3.92}$$

显然，若$c\neq 0$时，$u(t,m)$在任意一点$m\in M$都不是非切向有界的，所以只需讨论由(3.89)式定义的$R_+\times M$上的调和函数，即不含t的线性项ct的调和函数.

由上面的引理和命题可得到$R_+\times M$上调和函数非切向有界

与非切向收敛之间的关系. 见如下定理:

定理3.5 设 $u(t,m)$是(3.89)式定义的 $R_+\times M$ 上的调和函数,u 在 M 的正测度子集 $S\subset M$ 的每一点上都非切向有界,则 u 在 S 的几乎每一点处都有非切向极限.

证明 因为 M 是齐性的,从而可取正数 $a_0>0$,使得对一切 $m\in M$,以 m 为中心、$2a_0$ 为半径的开测地球$B(m,2a_0)$的闭包 $\overline{B}(m,2a_0)$,(3.91)式成立,且具有共同的 $b_0>0$. 因此可选 M 中有限个点 $m_1,m_2,\cdots,m_b$,使得

$$\bigcup_{k=1}^{b} B_k,\ B_k = B(m_k,a_0) \quad (k=1,2,\cdots,b)$$

覆盖 M.

不失一般性,可认为 S 是闭集,否则,因为 S 可测,可选包含于 S 的一列闭集 S_l 收敛于 S. 记

$$\begin{aligned}F &= F_{\alpha,N,k}\\ &= \left\{m\in S\cap \overline{B}_k,\ \sup_{(t,n)\in\Gamma_\alpha(m)}\{|u(t,n)|\}\leqslant N\right\},\\ A &= A_{\alpha,N,k}\\ &= \left\{\bigcup_{n\in F=F_{\alpha,N,k}}\Gamma_\alpha(n)\right\}\cap\left\{p=(t,n),0<t<2b_\alpha\right\},\\ E &= E_{\alpha,N,k}\\ &= \left\{\bigcup_{n\in F}\Gamma_\alpha(n)\right\}\cap\{p=(t,n),0<t<b_\alpha\}.\end{aligned}$$

并取 α 为正有理数,N 为正整数,$k=1,2,\cdots,b$,则每个 $F_{\alpha,N,k}$均为有界闭集,且 S 是所有的 $F_{\alpha,N,k}$的并集,其中 b_α 选为使

$$\left\{n\in M\,|\,(2b_\alpha,n)\in\bigcup_{m\in F_{\alpha,N,k}}\Gamma(m)\right\}\subset\overline{B}_k(m_k,2a_0)$$

成立的最大正数. 再对正整数 $j>1/b_\alpha$,令 $\chi_j(m)$是集合$\{m\in M\,|\,(1/j,m)\in A\}$的特征函数,与欧氏空间中的证明相同,令

$$u_j(t,m) = u(1/j+t,m),$$

$$f_j(m) = \chi_j(m)u_j(0,m),$$

$$\varphi_j(t,m) = P_t * f_j(m),$$
$$\psi_j(t,m) = u_j(t,m) - \varphi_j(t,m).$$

因为$\frac{1}{N}u(t,m)$也是调和函数，它在A上的绝对值不超过1，为简便起见，不妨认为上面的$u(t,m)$在A上适合$|u(t,m)|\leqslant 1$，从而有$|f_j(m)|\leqslant 1$，$|\varphi_j(t,m)|\leqslant 1$，因而$\|f_j\|_2\leqslant 1$，(因为我们总约定取$M$的总体积为1)，从而存在$f_j$的子列$f_{j_k}$弱收敛于$f\in L^2(M)$，因而当$k\to+\infty$时$\varphi_{j_k}(t,m)$收敛于$\varphi(t,m)$，且

$$\varphi(t,m) = P_t * f(m).$$

同样地，$\psi_{j_k}(t,m)$收敛于$\psi(t,m)$，

$$\psi(t,m) = u(t,m) - \varphi(t,m).$$

现在令$\xi(m)$为集$M\setminus F$的特征函数以及令

$$W(t,m) = 2b_\alpha^{-1}t + cP_t * \xi(m),$$

则同欧氏空间中的证明相似，可由引理3.12和引理3.13证明只要适当选取$c>0$，就有

$$W(t,m) \pm \psi(t,m) \geqslant 0$$

在E上成立. 因为$W(t,m)$和$\varphi(t,m)$根据定理3.2对几乎所有的$m\in F$均非切向收敛，且$W(t,m)$对几乎所有的$m\in F$非切向收敛于零. 而上式表明$\psi(t,m)$对几乎所有的$m\in F$也非切向收敛于零，从面$u(t,m)$对几乎所有的$m\in F$非切向收敛. 由于以上的结论对所有可列的$F_{\alpha,N,k}$成立，因而对几乎每个S中的点$u(t,m)$都非切向收敛. 于是定理得证. ▌

§3.2　Grand 极大函数

Grand 极大函数在欧氏空间的调和分析中，特别在H^p空间的原子分解结构理论中，起着重要的作用.

对紧致齐性空间M，由第2章§2.2节中的 Poisson 求和公式，首先可建立起中心 Grand 极大函数. 进一步，通过对中心核函数$K_t^\phi(m)$的分解，即本节中的定理3.6，提供了建立一般的 Grand

极大函数的一种方法，它对于一般的紧致 Riemann 流形也同样适用.

3.2.1 中心 Grand 极大函数

设 $S_I(\mathfrak{h})$ 是 $\mathfrak{h}$ 上的 Weyl 群不变的 C^∞ 速降函数全体组成的函数类. 根据第 2 章 § 2.2 的定理 2.5，可定义映射

$$\Pi_0 : S_I(\mathfrak{h}) \to C_I^\infty(G),\ \phi \to \Pi_0(\phi).$$

而由第 1 章的引理 1.2，又定义了映射

$$\Pi_3 : C_I^\infty(G) \to C_I^\infty(M),\ f \to \Pi_3(f).$$

容易验证 Π_0 与 Π_3 均是满射，且 Π_0 可延拓为从 $L_I^{\frac{1}{2}(n-q)}(\mathfrak{h})$ 到 $L_I(G)$ 中的映射.

定义 3.6 设 $S_I(\mathfrak{h})$ 是 $\mathfrak{h}$ 上 Weyl 群不变的 C^∞ 速降函数全体组成的函数空间，$S'(M)$ 是 $C^\infty(M)$ 上广义函数全体组成的广义函数空间. 对每一个 $\Phi \in S_I(\mathfrak{h})$ 和 $t>0$，置

$$\Phi_t(h) = t^{-q}\Phi(h/t),\ q = \dim\mathfrak{h}.$$

并记

$$K^\Phi(m) = K_1^\Phi(m) = \Pi_3 \circ \Pi_0(\Phi)(m),$$

$$K_t^\Phi(m) = \Pi_3 \circ \Pi_0(\Phi_t)(m),$$

则对每个 $\Phi \in S_I(\mathfrak{h})$，可定义 $f \in S'(M)$ 如下的极大函数：

$$\Phi_+^*(f)(m) = \sup_{t>0}\{|K_t^\Phi * f(m)|\},$$

$$\Phi_\nabla^*(f)(m) = \sup_{(t,n)\in\Gamma(m)}\{|K_t^\Phi * f(n)|\},$$

$$\Phi_T^\lambda(f)(m) = \sup_{n\in M, t>0}\left\{|K_t^\Phi * f(n)|\left(\frac{t}{\mathrm{d}(m,n)+t}\right)^\lambda\right\},$$

其中 $\lambda>0$，$\Phi_T^\lambda(m)$ 称为 Φ 的切向极大函数.

先建立中心极大函数的定义如下：

定义 3.7 设 K_N^0 为

$$K_N^0 = \{K^\Phi \in C^\infty(M), \Phi \in S_I(\mathfrak{h}), \|\Phi\|_N \leqslant 1\},$$

其中取 $n=\dim G$，$q=\dim\mathfrak{h}=\operatorname{rank}G$，则 $\|\Phi\|_N$ 定义为

$$\|\Phi\|_N = \sup_{h\in\mathfrak{h}, |l|\leqslant N+n-q, m\leqslant|l|}\left\{(1+|h|)^{m+q+1}\left|\left(\frac{\partial}{\partial h}\right)^l \Phi(h)\right|\right\}.$$

则对 $f\in S'(M)$，f 的中心 Grand 极大函数 f^* 定义为

$$f_{0,N}^*(m)=\sup_{K^\Phi\in K_N^0}\{\Phi_\nabla^*(f)(m)\},$$

其中 K^Φ、K_t^Φ 和 Φ_∇^* 由定义 3.6 给出.

设 $\mathfrak{p}=T_o(M)=T_m(M)$ 由第 1 章 §1.3 中的(1.58)式给出. $X_1,\cdots,X_l$，$l=\dim M$，是 $\mathfrak{p}$ 的一组标准正交基，则每个 $X\in\mathfrak{p}$ 有唯一的表示：

$$X=x_1X_1+x_2X_2+\cdots+x_lX_l. \tag{3.93}$$

定义 3.8　设 $N_0\subset\mathfrak{p}$ 是 o 点(也是 $m\in M$ 点)的切割迹的内部，则当 $X\in N_0$ 时(3.93)式定义了 $o\in M$(或 $m\in M$)点的测地法坐标系. 对 $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_l)\in\mathbf{Z}_+^l$ 记

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha=\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1}\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^{\alpha_2}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial x_l}\right)^{\alpha_l},$$

并定义当 X 由(3.93)式表示时，有

$$\left(\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha f\right)(m)=\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha f(p(m)\exp X\cdot o)\Big|_{X=0}.$$

对 $f\in C^\infty(M)$，定义

$$|||f|||_N=\sup_{m\in M,|\alpha|\leqslant N}\left\{\left|\left(\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha f\right)(m)\right|\right\}.$$

如同在欧氏空间中一样，有引理如下：

引理 3.14　设 $A_t(m)$ 是 M 上的 Abel-Poisson 核，则存在一个 $[1,+\infty)$ 上的 C^∞ 速降实值函数 $\psi(s)$，它唯一决定一个 $\varphi\in S_l(\mathfrak{h})$，适合 $\int\varphi(h)\mathrm{d}h=1$，且有下式成立：

$$K_t^\varphi(m)=\int_1^\infty\psi(s)A_{ts}(m)\mathrm{d}s,$$

由此可得：对任意的 $f\in S'(M)$ 有

$$\varphi_+^*(f)(m)\leqslant\int_1^\infty|\psi(s)|\mathrm{d}sA_+^*(f)(m)$$

成立.

引理 3.14 的证明同文献[4]中的证明相似，这里从略.

由非切向极大函数的定义可得如下引理：

引理 3.15 记 R_0 为

$$R_0 = \sup_{m,n\in M}\{\mathrm{d}(m,n)\},$$

则可得对任一 $f\in S'(M)$ 和任一 $n\in M$，有下式成立：

$$P_{\triangledown}^{*}(f)(m) \geqslant |P_t * f(n)|, t\geqslant R_0, n\in M;$$

$$A_{\triangledown}^{*}(f)(m) \geqslant |A_t * f(n)|, t\geqslant R_0, n\in M;$$

$$\Phi_{\triangledown}^{*}(f)(m) \geqslant |K_t^{\Phi} * f(n)|, t\geqslant R_0, n\in M.$$

同欧氏空间中的证明相似（见文献[4]）可得如下引理：

引理 3.16 设 $\Phi\in S_l(\mathfrak{h})$，$\int\Phi(h)\mathrm{d}h=1, 0<p<\infty, \lambda>l/p$，$l=\dim M$. 再设 $f\in S'(M)$，$\Phi_{\triangledown}^{*}(f)$ 和 $\Phi_{T}^{*}(f)$ 与定义 3.6 中所述相同. 若 $\Phi_{\triangledown}^{*}(f)\in L^p(M)$，则必有 $\Phi_{T}^{*}(f)\in L^p(M)$，且存在仅依赖于 M 和 p 的正数 C_p，使

$$\|\Phi_{T}^{*}(f)\|_p \leqslant C_p\|\Phi_{\triangledown}^{*}(f)\|_p$$

成立.

证明 记 $B(n,t)$ 是以 $n\in M$ 为中心、半径为 t 的测地球，由定义可得对一切 $z\in B(n,t)$ 恒有

$$|K_t^{\Phi} * f(n)| \leqslant \Phi_{\triangledown}^{*}(f)(z)$$

成立. 又因为 $B(n,t)\subset B(m,\mathrm{d}(m,n)+t)$，则可得

$$|K_t^{\Phi} * f(n)|^b \leqslant |B(n,t)|^{-1}\int_{B(n,t)}(\Phi_{\triangledown}^{*}(f)(z))^b\mathrm{d}z.$$

在上式中取 $b=l/\lambda$，则 $b<p$，再取 $a=p/b$，则 $a>1$，且 $(\Phi_{\triangledown}^{*}(f))^b\in L_a(M)$. M 中测地球 $B(m,r)$ 的体积 $|B(m,r)|$ 适合 $C_1r^l\leqslant|B(m,r)|\leqslant C_2r^l$，其中 C_1 与 C_2 是仅依赖于 M 的正数. 由 (3.15) 式的定义，当 $\mathrm{d}(m,n)<t$ 时，存在仅依赖于 M 的正数 C_3，使

$$|K_t^{\Phi} * f(n)|^b \leqslant C_3\left(\frac{\mathrm{d}(m,n)+t}{t}\right)^l \mathrm{HL}[\Phi_{\triangledown}^{*}(f)]^b(m).$$

对上式加以变形，则与欧氏空间相似，由 HL 极大函数的性质就证明了引理. ▎

引理 3.17 设 φ 是引理 3.14 中定义的函数，则对一切 $f_t\in$

$C^\infty(M)$ $(t>0)$和正奇数 N，存在着函数 $\theta_t^{(s)}$ 和 $\eta_t^{(s)}\in C^\infty(M)$，$0<s<1$，使得

(1) $f_t(m)=\int_0^1 K_{ts}^\varphi * \theta_t^{(s)}(m)\mathrm{d}s$

$$=\int_0^1 K_s^\varphi * \eta_t^{(s)}(m)\mathrm{d}s;$$

(2) $\int_M |\theta_t^{(s)}(m)|\mathrm{d}m\leqslant Cs^N t^{N+1}|||f_t|||_{N+1}$;

(3) $\int_M |\eta_t^{(s)}(m)|\mathrm{d}m\leqslant Cs^N\ |||f_t|||_{N+1}$;

证明　考虑积分

$$I=(-1)^{N+1}\int_0^1\xi(s)\left[\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^{N+1}(K_{us}^\varphi*\cdots*K_{us}^\varphi)\right]*f_t\mathrm{d}s,$$

其中 $K_{us}^\varphi*\cdots*K_{us}^\varphi$是 $N+2$ 个 $K_{us}^\varphi(m)$的卷积，且显然有

$$\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^{N+1}(K_{us}^\varphi*\cdots*K_{us}^\varphi)$$

$$=\sum_{|J|=N+1}C_J K_{us}^\varphi*\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^{j_1}\{K_{us}^\varphi\}*\cdots*\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^{j_{N+1}}\{K_{us}^\varphi\};$$

$\xi(s)$是$[0,1]$上的 C^∞函数，且适合：当 $0\leqslant s\leqslant\frac{1}{2}$时，$\xi(s)=s^N/N!$；当$\frac{1}{2}<s<1$ 时，$0<\xi(s)<s^N/N!$；$\xi(s)$的 k 阶导数 $\xi^k(s)$适合 $\xi^k(1)=0$，$k=0,1,\cdots,N+1$.

对 I 关于积分变元 s 分部积分 $N+1$ 次，由第2章§2.3 中的定理 2.9 可得

$$f_t(m)=I-\int_0^1\xi^{(N+1)}(s)K_{us}^\varphi*\cdots*K_{us}^\varphi*f_t(m)\mathrm{d}s$$

$$=\int_0^1 K_{us}^\varphi*H_{u,t}^{(s)}(m)\mathrm{d}s,$$

其中

$$H_{u,t}^s(m)$$

$$=-\xi^{(N+1)}(s)(K_{us}^\varphi*\cdots*K_{us}^\varphi)*f_t$$

$$+(-1)^{(N+1)}\xi(s)\sum_{|J|=N+1}C_J\left(\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^{j_1}K_{us}^\varphi*\cdots*\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^{j_{N+1}}K_{us}^\varphi\right)*f_t,$$

式中 $J=(j_1,\cdots,j_{N+1})\in \mathbf{Z}_+^{N+1}$, $|J|=j_1+\cdots+j_{N+1}$.

注意到 $A_t(m)$ 适合微分方程

$$\left(\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^2+\Delta-|\delta|^2 I\right)A_t(m)\equiv 0,$$

其中 I 是恒等算子，Δ 是 M 上的 Laplace-Beltrami 算子. 再由引理 3.14 就有

$$\begin{aligned}&\left(\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^k K_{us}^{\varphi}\right)(m)\\&=\pm u^k(|\delta|^2 I-\Delta)^{\frac{1}{2}k}\left\{\int_1^{\infty}\psi(x)x^k A_{usx}(m)\mathrm{d}x\right\}\\&\equiv u^k(|\delta|I-\Delta)^{\frac{1}{2}k}\{K_{us,k}^{\varphi}(m)\}.\end{aligned}$$

因为 $K_{us;k}^{\varphi}(m)$ 是 M 上的中心函数，记

$$F_{us}^{\varphi}=K_{us}^{\varphi}*\cdots*K_{us}^{\varphi}$$

是 $N+1$ 个 K_{us}^{φ} 的卷积：

$$R_{us}^{\varphi}(m)=\sum_{|J|=N+1}C_J K_{us,j_1}^{\varphi}*\cdots*K_{us,j_{N+1}}^{\varphi}(m),$$

就得到了

$$\begin{aligned}H_{u,t}^{(s)}(m)=&-\xi^{(N+1)}(s)F_{us}^{\varphi}*f_t(m)\\&+(-1)^{N+1}u^{N+1}\xi(s)R_{us}^{\varphi}\\&*\{(|\delta|^2 I-\Delta)^{\frac{1}{2}(N+1)}f_t\}(m).\end{aligned}$$

因为 N 为正奇数，$(|\delta|^2-\Delta)^{\frac{1}{2}(N+1)}$ 是 M 上的 C^{∞} 的微分算子，结合 $\xi(s)$ 的性质就得到

$$\begin{aligned}|H_{u,t}^{(s)}(m)|\leqslant s^N|F_{us}^{\varphi}*f_t(m)|&+\sum_{|\alpha|\leqslant N+1}C_{\alpha}s^N u^{N+1}\\&\times\left|R_{us}^{\varphi}*\left(\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha}f_t\right)(m)\right|,\end{aligned}\tag{3.94}$$

其中 C_{α} 是由 M 和 N 决定的正常数.

对(3.94)式积分，当 $0<t\leqslant 1$ 时取 $u=t$，而当 $t>1$ 时取 $u=1$，就证明了引理. 但是更有用的还是(3.94)式. ▌

还需指出的是，引理 3.17 中的 N 为正奇数的限制是可以取

消的，特别在讨论由以下的定义 3.12 定义的 Grand 极大函数时，只需将引理的结论稍作改变即可. 但在此并不需要它.

其次要指出的是，将引理 3.17 中的 $K_t^\varphi(m)$ 分别用 $P_t(m)$ 或 $A_t(m)$ 代替时，引理仍然成立.

引理 3.18　设 φ 是引理 3.14 定义的函数，则对任一 $f\in S'(M)$ 和任一正偶数 N 和正整数 λ 以及 $N\geqslant\lambda+1$，存在仅依赖于空间 M 和正偶数 N 的正数 C，使得

$$f_{0,N}^*(m)\leqslant C\phi_\lambda^*(f)(m).$$

证明　由引理 3.17 可得

$$\begin{aligned}K_t^\varphi*f(n)&=\int_0^1 K_{ts}^\varphi*H_{ut}^{(s)}*f(n)\mathrm{d}s\\&=\int_0^1 H_{u,t}^{(s)}*(K_{ts}^\varphi*f)(n)\mathrm{d}s\\&=\int_0^1\int_M H_{u,t}^s(p(y)^{-1}\cdot o)K_{ts}^\varphi\\&\quad *f(p(n)\cdot y)\mathrm{d}y\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

在上式中，因为 K_t^φ 是中心函数，从而 $H_{u,t}^{(s)}(m)$ 也是中心函数. 由第 1 章 § 1.5 中的卷积定义并作变量置换，就可得到上式最后一个等式.

当 $\mathrm{d}(m,n)<t$ 时，由上式可得

$$\begin{aligned}&|K_t^\varphi*f(n)|\\&\leqslant\phi_\lambda^*(f)(m)\int_0^1|H_{u,t}^{(s)}(y)|\\&\qquad\times\left(\frac{\mathrm{d}(m,p(n)\cdot y)+ts}{ts}\right)^\lambda\mathrm{d}y\mathrm{d}s\\&\leqslant C\|\Phi\|_N\phi_\lambda^*(f)(m).\end{aligned}$$

在上式中，当 $t>1$ 时取 $u=1$，用引理 3.17 中(3)的估计方法，当 $0<t\leqslant1$ 时，取 $u=t$，用引理 3.17 中(2)的估计方法，并由

$$\mathrm{d}(m,p(n)y)\leqslant\mathrm{d}(0,y)+\mathrm{d}(m,n),$$

再用定理 3.3 和定理 3.6 来计算导数，即可得到最后的不等式，其中 $t>1$ 的估计要用到后面的(3.107)式.

由(3.107)式即得到对任意的 $\Phi\in S_l(\mathfrak{h})$，有

$$\Phi_{\nabla}^{*}(f)(m)\leqslant C\|\Phi\|_N\phi_{\nabla}^{*}(f)(m).$$

这就证明了引理. ▌

3.2.2 核函数 $K_t^{\varphi}(m)$的分解

在紧致齐性空间 M 上，对于由定义 3.6 定义的核函数 $K_t^{\varphi}(m)$ 以及其各阶偏导数的值的估计是很重要的. 这一估计导致了核函数 $K_t^{\varphi}(m)$的一种分解，它不仅显示了 $K_t^{\varphi}(m)$的主要部分，也给出了构造核函数的更一般的方法.

定理 3.6 设 $\Phi\in S_l(\mathfrak{h})$、$K_t^{\varphi}(m)$均由定义 3.6 定义，则$K_t^{\varphi}(m)$具有如下的分解：

$$K_t^{\varphi}(m)=\Phi_{0,t}(m)+\sum_{k=1}^{n_0}\Phi_{k,t}(m),$$

它具有下述性质：

(1) 对 $k=0,1,\cdots,n_0$，$\Phi_{k,t}(m)$均为 M 上的 C^{∞}的中心函数.

(2) 对 $k=1,2,\cdots,n_0$，$\Phi_{k,t}(m)$具有如下的导数估计：

$$|||\Phi_{k,t}|||_N\leqslant C_Na(t)\|\Phi\|_N,$$

$$\sup_{|\alpha|\leqslant N,m\in M}\left\{\left|\left(\frac{d(o,m)+t}{t}\right)^{|\alpha|-1}\left(\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha}\Phi_{k,t}\right)(m)\right|\right\}$$
$$\leqslant C_Na(t)\|\Phi\|_N,$$

其中 $\|\Phi\|_N$ 由定义 3.7 定义，$|||\Phi_{k,t}|||_N$及$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha}$ 由定义 3.8 定义，$\alpha\in\mathbf{Z}_+^l$，$l=\dim M$，当 $0<t\leqslant 1$ 时 $a(t)=t$；而当 $t>1$ 时 $a(t)=1/t$，C_N 仅依赖于 M、N 和 b_0，其中 b_0 是适当小的正数.

(3) $\Phi_{0,t}(m)$适合$\operatorname{supp}\Phi_{0,t}\subset B(0,3b_0)$，且存在仅由 M 和 N 决定的正数 B_N，使当 $\alpha\in\mathbf{Z}_+^l$，$|\alpha|\leqslant N$ 时，

$$\left|\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha}\Phi_{0,t}(m)\right|$$
$$\leqslant B_Nt/(t^2+d(o,m)^2)^{\frac{1}{2}(|\alpha|+l+1)}$$

对一切 $m\in M$ 成立.

证明 先明确定理中 b_0 的取值范围：设 N_0 是定义 3.8 中的 $\mathfrak{p}$ 中的区域，并记 $\tilde{B}(0,r)$为 $\mathfrak{p}$ 中以 0 为中心、半径为 r 的球. 置

$$r_0 = \sup_r \{\widetilde{B}(0,r) \subset N_0\}.$$

再设 $M=G/K$,$D_0(h)$是 G 的由(2.18)式定义的函数,$B(0,r)$是 G 的李代数 $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 子代数 $\mathfrak{h}$ 的以 0 为中心、半径为 r 的球,$Q\subset\mathfrak{h}$与定理 3.2 证明中的 Q 相同.令

$$r_1 = \sup_r \{B(0,r) \subset Q, D_0(h) \text{ 在 } B(0,r) \text{ 上恒不为零}\}.$$

取定理中的 b_0 适合

$$0 < b_0 \leqslant \min\left\{\frac{1}{4}r_0, \frac{1}{4}r_1\right\}. \tag{3.95}$$

根据定义 3.6 和定理 2.5,考虑下面定义在 $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 子代数 $\mathfrak{h}$ 上的 Weyl 群不变的函数,它也是 G 上的中心函数 $\Pi_0(\Phi_t)(x)$ 在 G 的 Cartan 子群 $T=\exp\mathfrak{h}$ 上限制所得的 T 上的中心函数

$$\begin{aligned}
&\Pi_0(\Phi_t)(\exp h) \\
&= B_1\sum_{a\in\Lambda}\left(P\left(\frac{\partial}{\partial h}\right)\Phi_t\right)(a+h)D(a+h)^{-1} \\
&= B_1\sum_{a\in\Lambda}\psi_t(a+h)D_0(a+h)^{-1}.
\end{aligned} \tag{3.96}$$

在上式中,$\Phi\in S_l(\mathfrak{h})$,$P(h)$、$P\left(\frac{\partial}{\partial h}\right)$、$D(h)$、$D_0(h)$均由(2.18)式定义,$n=\dim G$, $q=\operatorname{rank}G$,

$$\Phi_t(h) = t^{-q}\Phi(h/t),\quad \Psi_t(h) = t^{-n}\Psi(h/t),$$

$$\Psi(h) = \left(P\left(\frac{\partial}{\partial h}\right)\Phi\right)(h)/P(h).$$

设 F 由(3.33)式给出,$t_{\infty}=e=G$ 的幺元,

$$t_{ij} = \exp h_{ij},\quad h_{ij}\in Q\backslash B(0,2b_0),$$

其中 $i=1,2,\cdots,N+1$;$j=1,2,\cdots,m_i$.则适当的选取$\{t_{ij}\}$可使之适合:

(a) $\{t_{ij}, i=1,2,\cdots,N+1; j=1,2,\cdots,m_i\}$是 Weyl 群不变的 T 的点集.

(b) 设 $\mathfrak{h}(h_{ij})$如定理 3.2 的证明中所定义,则有

$$\mathfrak{h}(h_{ij}) = \mathfrak{h}(h_{ik}),\quad j,k = 1,2,\cdots,m_i.$$

(c) 对 $1\leqslant i\leqslant N$，$\dim\mathfrak{h}(h_{ij})\geqslant 1$，且存在 $0<b_i\leqslant b_0$，使得当 $|h-h_{ij}|\leqslant 3b_i$ 且 $D(h)=0$ 时，有 $\mathfrak{h}(h)\subset\mathfrak{h}(h_{ij})$ 及 $|h_{ij}|\geqslant 2b_0$.

(d) 对 $i=N+1$，当 $|h-h_{ij}|\leqslant 3b_i$ 时 $D(h)\neq 0$.

(e) $\{B(e,2b_0),B(t_{ij},2b_i),i=1,2,\cdots,N+1;j=1,2,\cdots,m_i\}$ 覆盖了 T.

(f) $\sigma(h_{ij})$若等于某个 h_{k_j}，$\sigma\in W$，这时还需取 $b_i=b_k$.

设 b_0 由(3.95)式所定义，对 $0<r\leqslant b_0$，定义 T 上的 C^∞ 径向函数 $\theta(r;t)$为

$$\theta(r;t)=\begin{cases}0, \text{ 若 } \mathrm{d}(t,e)\geqslant \dfrac{5}{2}r;\\ 0<\theta(r,t)<1, \text{ 若 } 2r<\mathrm{d}(t,e)<\dfrac{5}{2}r;\\ 1, \text{ 若 } \mathrm{d}(t,e)\leqslant 2r.\end{cases}$$

再用 $\theta(r;t)$定义 T 上的 C^∞ 函数族

$$\theta_0(t)=\theta(b_0,t),\quad \theta_{ij}(t)=\theta(b_i;t_{ij}^{-1}t),$$

其中 $j=1,2,\cdots,m_i$；$i=1,2,\cdots,N+1$. 再置

$$\theta(t)=\theta_0(t)+\sum_{i=1}^{N+1}\sum_{j=1}^{m_i}\theta_{ij}(t);$$

$$\eta_0(t)=\theta_0(t)/\theta(t),$$

$$\eta_{ij}(t)=\theta_{ij}(t)/\theta(t),$$

其中 $j=1,2,\cdots,m_i$；$i=1,2,\cdots,N+1$. 则

$$\{\eta_0(t),\eta_{ij}(t),j=1,2,\cdots,m_i;i=1,2,\cdots,N+1\}$$

就是 T 上的一个 1 的分解.

设 $t_{ij}=\exp h_{ij}$，$j=1,2,\cdots,m_i$；$i=1,2,\cdots,N+1$，且适合 $h_{ij}\in Q$，若存在两个或两个以上的 h_{ij}，使得 $\exp h_{ij}$等于同一个 t_{ij}时，则只取定其中一个 h_{ij}. 当 $t=e$ 时，则取 $h=0$. 定义 $\mathfrak{h}$ 上的 C^∞ 函数族

$$\tilde{\theta}_{ij}(a+h)=\begin{cases}\theta_{ij}(\exp h), \text{ 若 } |h-h_{ij}|<3b_i;\\ 0, \text{ 若 } |h-h_{ij}|\geqslant 3b_i,\end{cases}$$

其中 $a\in\Lambda$，$j=1,2,\cdots,m_i$；$i=0,1,\cdots,N+1$，而当 $i=0$ 时，则取 $m_0=1$，并取 $\theta_{01}(\exp h)=\theta_0(\exp h)$. 再置

$$\Psi_{ij}(a+h)=\widetilde{\theta}_{ij}(a+h)/\theta(\exp(a+h))$$
$$=\widetilde{\theta}_{ij}(a+h)/\theta(\exp h),\tag{3.97}$$

其中 $j=1,2,\cdots,m_i;i=0,1,\cdots,N+1$.

应用定理 3.2 证明中的(3.26)式至(3.34)式中的记号，并将各式中的 h_0 取为 $h_0=h_{ij}$，特别将(3.32)式中的 $\Phi_t^0(h)$ 换为这里的 $\Psi_t(h)$，(3.96)式可表示成

$$\Pi_0(\Phi_t)(\exp h)=\sum_{i=1}^{N+1}\sum_{j=1}^{m_i}\eta_{ij}(\exp h)\Pi_0(\Phi_t)(\exp h)$$
$$\equiv\sum_{i=0}^{N+1}\sum_{j=1}^{m_i}F_t(t_{ij};\exp h),\tag{3.98}$$

其中 $\eta_{01}(t)=\eta_0(t)$，$t_{01}=e$，e 是 G 的幺元，

$$F_t(t_{ij};\exp h)$$
$$=B_1\sum_{a\in A(h_{ij})}\frac{\varepsilon(a,h_{ij})}{|W(a,h_{ij})|}g_{ij}^t(a+h_{ij};y,z),\tag{3.99}$$

适合 $h=h_{ij}+y+z$ 由(3.27)式所定义，以及有

$$g_{ij}^t(a+h_{ij};y,z)$$
$$=\Psi_{ij}(a+h_{ij}+y+z)A_t(a+h_{ij};y,z)D_2(z)^{-1}.\tag{3.100}$$

如同第 1 章 §1.3 的 1.3.1 小节中设 $\mathfrak{g}=\mathfrak{h}_0\oplus\mathfrak{g}'$，$\mathfrak{h}_0$ 是 $\mathfrak{g}$ 的中心，$\mathfrak{g}'$ 是 $\mathfrak{g}$ 的半单紧致子代数. 再设 G' 是 $\mathfrak{g}'$ 对应的单连通的半单紧致李群，$\widetilde{G}=T_0\times G'=\widetilde{\exp}\mathfrak{g}$ 是紧致通用覆盖群，则存在 G' 的中心 $Z(G')$ 的子群 Z，使得 $G=\widetilde{G}/Z$，并设 $\widetilde{T}=\widetilde{\exp}\mathfrak{h}$ 是 $\widetilde{G}$ 的一个 Cartan 子群. 再设 $h_{ij}=\eta+\widetilde{h}_{ij}$，根据(3.72)式和定义 3.4 知 $\mathfrak{g}(h_{ij})$ 是 $\widetilde{h}_{ij}$ 在 $\mathfrak{g}$ 中的中心化子，$\mathfrak{g}(h_{ij})=\mathfrak{h}_0\oplus\mathfrak{g}_2(h_{ij})$，$G_2(h_{ij})=\widetilde{\exp}\mathfrak{g}_2(h_{ij})$ 是 G' 的对应于 $\mathfrak{g}_2(h_{ij})$ 的子群，它也是单连通的，则 $\mathfrak{h}(h_{ij})$ 就是 $\mathfrak{g}_2(h_{ij})$ Cartan 子代数，$T_2(h_{ij})=\widetilde{\exp}\mathfrak{h}(h_{ij})$ 是 $G_2(h_{ij})$ 的一个 Cartan 子群. 次设 $\widetilde{T}=T_1\times T_2(h_{ij})$，$\widehat{T}_1$ 表示 T_1 的不可约酉表示的权的集合. 设 $y+z\in\mathfrak{h}$，$z\in\mathfrak{h}(h_{ij})$，$y\in\mathfrak{h}(h_{ij})^{\perp}$，$\exp z\in T_2(h_{ij})$，$\exp y\in T_1$，定义 $\widetilde{T}$ 上的函数

$$\alpha_{ij}^t(a+h_{ij};\exp y\exp z)$$
$$=\begin{cases}\theta(\exp h)g_{ij}^t(a+h_{ij};y,z)D_2(z), 若\ |y+z|<3b_i;\\ 0, 其他情形.\end{cases}$$

(3.101)

则 $\alpha_{ij}^t(a+h_{ij};\exp y\exp z)$是 $\tilde{T}$ 上的 C^∞ 函数，且关于 z 在 Weyl 群 $W(h_{ij})$作用下是反对称的，因而可展开成 Fourier 级数：

$$\alpha_{ij}^t(a+h_{ij};\exp y\exp z)$$
$$=\sum_{\mu\in\hat{T}_1,\lambda\in\hat{G}(h_{ij})}C_{\lambda\mu}e^{i\mu(y)}\chi_\lambda(\exp z)D_2(z), \qquad (3.102)$$

其中 $\chi_\lambda(x)$是 $G(h_{ij})$的不可约酉表示的特征. 由此可得

$$\theta(\exp(h_{ij}+y+z))g_{ij}^t(a+h_{ij},y,z)$$
$$=\alpha_{ij}^t(a+h_{ij};\exp y\exp z)D_2(z)^{-1}$$
$$=\sum_{\lambda,\mu}C_{\lambda\mu}e^{i\mu(y)}\chi_\lambda(\exp z), |y+z|<3b_i. \qquad (3.103)$$

容易看到，(3.102)式的等号右面是 $\tilde{T}$ 上的 C^∞ 函数的多重 Fourier 级数. 它关于 $\tilde{T}$ 的权$(\mu,\sigma(\lambda))$ $(\sigma\in W(h_{ij}))$的 Fourier 系数是 $C_{\lambda,\mu}$，它关于 $\tilde{T}$ 的其余的权的 Fourier 系数是零. 由此可得(3.103)式第二个等式右端的函数级数之和，也是 $\tilde{T}$ 上的 C^∞ 函数. 又因为 $\theta(\exp h)$是 $\tilde{T}$ 上的，也是 $\mathfrak{h}$ 上恒正的 C^∞ 函数，由(3.103)式就可得到，看作 $y+z\in\mathfrak{h}$ 上的函数，$g_{ij}^t(a+h_{ij},y,z)$是 $\mathfrak{h}$ 上的 C^∞ 函数，它的支集在 $\mathfrak{h}$ 的区域$|y+z|<\frac{5}{2}b_i$ 之中. 这就表明了 $A_t(a+h_{ij};y,z)D_2(z)^{-1}$在$|y+z|<\frac{5}{2}b_i$ 上是 C^∞的. 如改变前面 $\theta(r,t)$的定义，则上面的证明依然成立. 由此可得，在区域$|y+z|<3b_i$上，$A_t(a+h_{ij};y,z)D_2(z)^{-1}$也是 C^∞的.

现在记 $h=y+z$，由(3.28)式可得

$$D_2(h)=D_2(y+z)=D_2(z),$$

而由(3.95)式又可得在$|h|\leqslant 3b_0$ 上 $P_2(h)/D_2(h)$恒不为零，且是 C^∞的. 因而在$|y+z|<3b_i$ 时，

$$A_t(a+h_{ij};y,z)P_2(y+z)^{-1}$$

$$= A_t(a + h_{ij}; y, z)P_2(z)^{-1}$$

关于 y、z 是 C^∞ 的. 由此又可得

$$\left(\frac{\partial}{\partial h}\right)^m \{A_t(a + h_{ij}, y, z)P_2(z)^{-1}\}$$

在 $h=y+z$, $y\in\mathfrak{h}(h_{ij})^\perp$, $z\in\mathfrak{h}(h_{ij})$时，关于 y、z 是 C^∞ 的函数. 因此，可用定理 3.4 的证明中，从(3.85)式到(3.88)式的证明方法进行估计，从而得到

$$\begin{aligned}
&\left|\left(\frac{\partial}{\partial h}\right)^m \{A_t(a + h_{ij}, y, z)P_2(z)^{-1}\}\right| \\
&\leqslant d_k \sup_{\substack{|y+z|\leqslant 3b_i \\ |\alpha|\leqslant k+s}} \left\{\left(\frac{\partial}{\partial h}\right)^\alpha \left[\left(P\left(\frac{\partial}{\partial h}\right)\Phi_t\right)(\cdot)D_1(\cdot)^{-1}\right]\right. \\
&\qquad \left.\times (a + h_{ij} + y + z)\right\},
\end{aligned} \tag{3.104}$$

其中，$m,\alpha\in \mathbf{Z}_+^q$，$k=|m|$，$s$ 为 $P_2(h)$的次数，$z\in\mathfrak{h}(h_{ij})$，$y\in\mathfrak{h}(h_{ij})^\perp$，$h=y+z$，$d_k$ 是仅依赖于 G、k 和 $b_0,b_1,\cdots,b_{N+1}$的常数，对适当取定的 $b_0,b_1,\cdots,b_{N+1}$，则可认为 d_k 仅依赖于 G 和 k.

由 h_{ij}和 b_i 的取法又可得到，存在仅依赖于 G 的正数 C_1 和 C_2 以及与 $b_0,b_1,\cdots,b_{N+1}$取法有关的正数 η_0，使下式成立：

$$\left.\begin{aligned}
&C_1|a| \leqslant |a + h_{ij} + h| \leqslant C_2|a|, \text{若 } 0\neq a\in\Lambda, |h|\leqslant 3b_i; \\
&C_1 b_0 \leqslant |h_{ij} + h| \leqslant C_2 b_0, \text{若 } h_{ij}\neq 0, |h|\leqslant 3b_i; \\
&\eta_0 = \min_{\substack{1\leqslant j\leqslant m_i \\ 1\leqslant i\leqslant N+1}} \{\alpha(h_{ij} + h), \alpha\in\Sigma_{h_{ij}}^+, |h|\leqslant 3b_i\} > 0.
\end{aligned}\right\} \tag{3.105}$$

由(3.104)式和(3.105)式就得到，当 $a+h_{ij}\neq 0$ 时，对取定的 $b_0,b_1,\cdots,b_{N+1}$，有

$$\left|\left\{\left(\frac{\partial}{\partial h}\right)^m [A_t(a + h_{ij} + \cdot)P_2(\cdot)^{-1}]\right\}(h)\right|$$

$$\leqslant \begin{cases} B_k t\,\|\Phi\|_k |a|^{-\frac{1}{2}(n+q)-1}\eta_0^{-k-\frac{1}{2}(n-q)}, \\ \qquad \text{若 } a\neq 0, 0 < t\leqslant 1; \\ B_k t\,\|\Phi\|_k b_0^{-\frac{1}{2}(n+q)-1}\eta_0^{-k-\frac{1}{2}(n-q)}, \\ \qquad \text{若 } a = 0, h_{ij}\neq 0, 0 < t\leqslant 1, \end{cases} \tag{3.106}$$

其中 $m\in Z_+^q$，$k=|m|$，B_k 仅依赖于 G 和 k，且总约定取 $\eta_0\leqslant b_0$，$\|\Phi\|_k$由定义 3.7 给出.

当 $t>1$ 时，由 $\Pi_0(\Phi_t)$的 Fourier 级数可得

$$
\begin{aligned}
&\left|\left(\frac{\partial}{\partial h}\right)^m\{\Pi_0(\Phi_t)(\exp h)\}\right| \\
&\quad=\left|\sum_{\lambda\in\hat{G}}\hat{\Phi}(t(\lambda+\delta))d_\lambda\left(\frac{\partial}{\partial h}\right)^m\{\chi_\lambda(\exp h)\}\right| \\
&\quad\leqslant\sum_{\lambda\in\hat{G}}\left|\hat{\Phi}(t(\lambda+\delta))d_\lambda^2|\lambda+\delta|^k\right| \\
&\quad=t^{-k-n-1}\sum_{\lambda\in\hat{G}}\{\left|\hat{\Phi}(t(\lambda+\delta))\right|(t|\lambda+\delta|)^{k+n+1}\} \\
&\qquad\times\frac{d_\lambda^2}{|\lambda+\delta|^{n+1}} \\
&\quad\leqslant t^{-k-n-1}C_1\|\Phi\|_k\left(1+\sum_{0\neq\lambda\in\hat{G}}\frac{d_\lambda^2}{|\lambda+\delta|^{n+1}}\right) \\
&\quad=C_k\|\Phi\|_k t^{-k-n-1},
\end{aligned}
\tag{3.107}
$$

其中 C_k 是仅依赖于 G 和 k 的正常数，$\hat{\Phi}$是 Φ 在 $\mathfrak{h}$ 上的 Fourier 变换.

由(3.98)、(3.96)、(3.106)和(3.107)式可得：

(i) 当 $t_{ij}\neq e$ 时

$$\left|\left(\frac{\partial}{\partial h}\right)^m F_t(t_{ij};\exp h)\right|\leqslant a(t)A_k\|\Phi\|_k,$$

其中 A_k 是仅依赖于 G 和 k 的正数，$a(t)$在$(0,+\infty)$上恒正，且当 $0<t\leqslant1$ 时 $a(t)\leqslant t$，$t>1$ 时 $a(t)\leqslant t^{-1}$；

(ii) 当 $t_{ij}=e$ 时

$$F_t(e;\exp h)=B_1\psi_{01}(h)\psi_t(h/t)D_0(h)^{-1}+\tilde{F}_t(e;\exp h)$$

其中

$$\tilde{F}_t(e;\exp h)=\sum_{0\neq a\in A(0)}\frac{\varepsilon(a,0)}{|W(a,0)|}g_{01}^t(a;h),$$

且适合

$$\left|\left(\frac{\partial}{\partial h}\right)^m\tilde{F}_t(e;\exp h)\right|\leqslant a(t)A_k\|\Phi\|_k;$$

(iii) $\widetilde{F}_t(e;\exp h)$是$G$上$C^\infty$的中心函数，再令

$$\widetilde{F}_t(t_{ij};\exp h) = \frac{1}{|W|}\sum_{\sigma\in W} F_t(\sigma(t_{ij});\exp h),$$

则$\widetilde{F}_t(t_{ij};\exp h)$是$T$上$C^\infty$的中心函数，且有下式成立：

$$\Pi_0(\Phi_t)(\exp h) = B_1\psi_{01}(h)\psi_t(h/t)D_0(h)^{-1} + \sum_{i=0}^{N+1}\sum_{j=1}^{m_i}\widetilde{F}_t(t_{ij};\exp h);$$

(iv) 置$\psi_{0,t}(x)$、$\psi_{ij,t}(x)$为

$$\psi_{0,t}(x) = B_1\psi_{01}(h(x))\psi_t(h(x)/t)D_0(h(x))^{-1},$$
$$\psi_{ij,t}(x) = \widetilde{F}_t(t_{ij};\exp h(x)),$$

其中 $j=1,2,\cdots,m_i$； $i=0,1,\cdots,N+1$； $x=y\exp h(x)y^{-1}$. 则$\psi_{0,t}(x)$和$\psi_{ij,t}(x)$是G上C^∞的中心函数. 将$\psi_{ij,t}(x)$重新编号，记之为$\psi_{k,t}(x)$，$k=1,2,\cdots,n_0$. 再置

$$\Phi_{k,t}(m) = \Pi_3(\psi_{k,t})(m),\ k = 0,1,\cdots,n_0,$$

就得到了定理中的(1). 再像定理3.2中的证明一样计算$\Phi_{k,t}(m)$的偏导数，利用(3.106)和(3.107)式的估计，就得到了定理中的(2)和(3)，这就证明了定理. ▌

定理3.6实际上提供了在紧致齐性空间M上构造更一般的核函数的方法，它由下面的定义3.9给出.

定义3.9 设$\{\eta_0(m),\eta_1(m),\cdots,\eta_{N_0}(m)\}$是$M$上的一个1的分解，$b_0$由(3.95)式定义，且$\eta_k(m)$适合：

(i) $\mathrm{supp}\eta_0\subset B\left(0,\frac{5}{2}b_0\right)$，并记$m_0=o$；

(ii) $\mathrm{supp}\eta_k\subset B(m_k,b_0)$，$\mathrm{d}(o,m_k)\geqslant 2b_0$，
$k=1,2,\cdots,N_0$；

(iii) $\eta_k\in C^\infty(M)$，$k=0,1,\cdots,N_0$，且当$\mathrm{d}(o,m)\leqslant 2b_0$时，有$\eta_0(m)\equiv 1$.

再设$S(\mathfrak{p})$是$\mathfrak{p}$上的C^∞速降函数全体组成的函数空间，其中$\mathfrak{p}$由第1章§1.3节(1.58)式所定义. 对$\Phi_k\in S(\mathfrak{p})$，$k=0,1,\cdots,$

N_0，令

$$\Phi_{k,t}(X) = t^{-l}\Phi_k(X/t),$$

其中 $X\in\mathfrak{p}, t>0, l=\dim M$. 再设 $\Phi=(\Phi_0,\Phi_1,\cdots,\Phi_{N_0}),\Phi_t=(\Phi_{0,t},\Phi_{1,t},\cdots,\Phi_{N_0,t})$，并记之为 $\Phi,\Phi_t\in S(\mathfrak{p})^{N_0+1}$. 取 $X_k\in\mathfrak{p}$，适合 $|X_k|\geqslant 2b_0, k=1,2,\cdots,N_0$，及 $X_0=0,\exp X_k=m_k$，定义

$$\begin{aligned}\widetilde{K}_t^{\Phi_k}(m) &= \widetilde{K}_t^{\Phi_k}(m_k\exp Y\cdot o)\\ &= \eta_k(m_k\cdot\exp Y\cdot o)\Phi_{k,t}(X_k+Y),\end{aligned}$$

再定义

$$\widetilde{K}_t^{\Phi}(m) = \sum_{k=0}^{N_0}\widetilde{K}_t^{\Phi_k}(m),$$

则对一切 $t>0$，$\widetilde{K}_t^{\Phi}(\cdot)\in C^\infty(m)$，且映射

$$\Phi\in S(\mathfrak{p})^{N_0+1}\to\widetilde{K}_1^{\Phi}(\cdot)\in C^\infty(M)$$

是 $S(\mathfrak{p})^{N_0+1}$ 到 $C^\infty(M)$ 的满射. 即对任一 $f\in C^\infty(M)$，必存在一个 $\Phi\in S(\mathfrak{p})^{N_0+1}$，使得 $f(m)=\widetilde{K}_1^{\Phi}(m)$ 对一切 $m\in M$ 恒成立. 其中 $m_k\cdot\exp Y\cdot o\equiv p(m_k)\cdot\exp Y\cdot o$.

下面建立 M 上的一种新的函数运算：

定义 3.10 设 f、$g\in L(M)$，令

$$f\otimes g(m) = \int_M f(p(m)^{-1}n)g(n)\mathrm{d}n,$$

则定义了 $L(M)$ 上的一种函数运算，它适合

$$f\otimes g(o) = \int_M f(n)g(n)\mathrm{d}n.$$

引理 3.19 设 f、$g\in L(M)$，则 $f\otimes g\in L(M)$. 且定义 3.10 定义的运算可延拓到 $f\in C^\infty(M)$、$g\in S'(M)$ 的情形.

证明 首先定义 $L(M)$ 到 $L(M)$ 中的映射 $f\to\widetilde{f}$，适合 $\widetilde{f}(n)=f(p(n)^{-1}\cdot o)$，对一切 $n\in M$ 成立. 由第 1 章 § 1.3 的 (1.71) 式和 (1.72) 式可得 $\mathrm{d}n=\mathrm{d}(p(n)^{-1}\cdot o)$，因此 $f\in L(M)$ 与 $\widetilde{f}\in L(M)$ 是等价的. 这就可得到

$$\int_M |f\otimes g(m)|\mathrm{d}m$$

$$\leqslant \int_M \int_M |f(p(m)^{-1}\cdot n)| \cdot |g(n)| \mathrm{d}n \mathrm{d}m$$

$$= \int_M \int_M |\tilde{f}(p(n)^{-1}\cdot m)| \mathrm{d}m |g(n)| \mathrm{d}n$$

$$= \int_M |\tilde{f}(m)| \mathrm{d}m \int_M |g(n)| \mathrm{d}n = \| f \|_1 \| g \|_1.$$

当 $f\in C^\infty(M)$时，设$\tilde{f}$ 的 Fourier 级数是

$$\tilde{f}(m) = \sum_{\lambda\in\hat{M}} d_\lambda \mathrm{Tr}(\ \hat{\tilde{f}}_\lambda T_\lambda(m)),$$

并记 g 的 Fourier 级数为

$$g(m) \sim \sum_{\lambda\in\hat{M}} d_\lambda \mathrm{Tr}(\hat{g}_\lambda T_\lambda(m)),$$

则可得

$$f\otimes g(m) = \sum_{\lambda\in\hat{M}} d_\lambda \mathrm{Tr}(\ \hat{\tilde{f}}_\lambda U_\lambda(p(m))' \hat{g}'_\lambda).$$

易见上式对 $g\in S'(M)$仍然有意义. 因而 $f\otimes g$ 可延拓到 $f\in C^\infty(M)$、$g\in S'(M)$的情形.　　▌

引理3.20　设 $f\in C_I^\infty(M)$、$g\in C^\infty(M)$、$h\in S'(M)$，则下式成立：

$$(f*g)\otimes h(m) = (\ \tilde{f} * h)\otimes g(p(m)^{-1}\cdot o),$$

其中 $\tilde{f}(m)=f(p(m)^{-1}\cdot o)$对一切 $m\in M$ 成立，且 $f\in C_I^\infty(M)$和 $\tilde{f}\in C_I^\infty(M)$是等价的.

通过对积分的具体计算就可证明此引理.

定义3.11　设 $f\in S'(M)$，$\Phi\in S'(\mathfrak{p})^{N_0+1}$和 $\tilde{K}_t^\Phi(m)$均由定义3.9所定义. 定义极大函数 $\tilde{\Phi}_\nabla^*(f)$和 $\tilde{\Phi}_+^*(f)$为

$$\tilde{\Phi}_\nabla^*(f)(m) = \sup_{(t,n)\in\Gamma(m)} \{ |\tilde{K}_t^\Phi \otimes f(n)| \},$$

$$\tilde{\Phi}_+^*(f)(m) = \sup_{t>0} \{ |\tilde{K}_t^\Phi \otimes f(m)| \}.$$

再置 $C^\infty(M)$的子类 K_N^c 为

$$K_N^c = \{\tilde{K}_1^\Phi \in C^\infty(M), \Phi\in S(\mathfrak{p})^{N_0+1}, \|\Phi\|_{\tilde{N}} \leqslant 1\},$$

式中若记 $l=\dim M$，则有

$$\|\Phi\|_{\tilde{N}} = \sup_{|m|\leqslant N, X\in P, 0\leqslant k\leqslant N}\left\{\left|\left(\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^m \Phi_k\right)(X)(1+|X|)^{N+l+1}\right|\right\},$$

其中 $m\in \mathbf{Z}^l_+$，$\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^m$ 是 $\mathfrak{p}$ 关于欧氏坐标$(y_1,\cdots,y_l)$的偏微分算子.

定义3.12 设 $f\in S'(M)$，$\Phi^*_\triangledown(f)$和 $\tilde{\Phi}^*_\triangledown(f)$分别由定义3.6和定义3.11给出. 定义 f 的一种 Grand 极大函数 f^*_N 为

$$f^*_N(m) = \sup_{K^\Phi_1\in K^0_N, \tilde{K}^\Phi_1\in K_N}\{\Phi^*_\triangledown(f)(m), \tilde{\Phi}^*_\triangledown(f)(m)\}.$$

Grand 极大函数 $f^*_N(m)$与中心的 Grand 极大函数$f^*_{0,N}(m)$有以下关系：

定理3.7 设 $f\in S'(M)$，$f^*_{0,N}$和 f^*_N 分别由定义3.7和定义3.11给出，则对一切的 $p>0$和一切的 $f\in S'(M)$，$f^*_{0,N}\in L^p(M)$的充分必要条件是 $f^*_N\in L^p(M)$，且有下式成立：

$$f^*_{0,N}(m)\leqslant f^*_N(m),$$

$$\|f^*_N\|_p\leqslant C_p\|f^*_{0,N}\|_p,$$

其中 C_p 是仅依赖于空间 M、p 和正整数 N 的正常数.

证明 由定义即可得 $f^*_{0,N}(m)\leqslant f^*_N(m)$. 为证明定理，只须估计 $\tilde{K}^\varphi_t\otimes f(n)$. 由引理3.17和引理3.20可得

$$\begin{aligned}\tilde{K}^\varphi_t\otimes f(n) &= \int_0^1 (K^\varphi_{us} * H^{(s)}_{u,t})\otimes f(n)\mathrm{d}s \\ &= \int_0^1 (K^\varphi_{us} * f)\otimes H^{(s)}_{u,t}(p(n)^{-1}\cdot o)\mathrm{d}s \\ &= \int_0^1\int_M (K^\varphi_{us} * f)(p(n)\cdot w)H^{(s)}_{u,t}(w)\mathrm{d}w\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

由上式可得，当 $\mathrm{d}(m,n)<t$ 时

$$\begin{aligned}&|\tilde{K}^\varphi_t\otimes f(n)| \\ &\leqslant \varphi^*_\lambda(f)(m)\int_0^1\int_M\left(\frac{\mathrm{d}(m,p(n)\cdot w)+us}{us}\right)^\lambda \\ &\quad\times |H^{(s)}_{u,t}(w)|\mathrm{d}w\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

其中 φ 为引理3.14中定义的函数，φ 与 K^φ_t 均为实函数，从而 $\tilde{K}^\varphi_t = K^\varphi_t = \overline{K^\varphi_t}$.

在上式中当 $t>1$ 时取 $u=1$，当 $0<t<1$ 时取 $u=t$，用引理3.17的证明中相似的估计方法即可得到当取 $N\geqslant\lambda+1$ 时，有

$$|\tilde{K}_t^{\varphi}*f(n)|\leqslant C\|\Phi\|_{\tilde{N}}\varphi_{\nabla}^{\lambda}(f)(m).$$

此即对任一 $\tilde{K}_1^{\varphi}\in K_N^{\iota}$，有

$$\Phi_{\nabla}^{*}(f)(m)\leqslant C\varphi_{\nabla}^{\lambda}(f)(m).$$

由引理3.18和定义3.12便得到

$$f_N^{*}(m)\leqslant C\varphi_{\nabla}^{\lambda}(f)(m).$$

再由引理3.16，就得到当 $f_{0,N}^{*}\in L^p(M)$ 时，有

$$\|f_N^{*}\|_p\leqslant C_p\|f_{0,N}^{*}\|_p,$$

于是完成了定理的证明. ▎

§3.3 $H^p(M)$ 的原子分解结构

在本节中，讨论 $H^p(M)$ 的原子分解结构，即证明以下定理：

定理3.8 设 $0<p\leqslant1\leqslant q\leqslant\infty$，$p\neq q$，$s\geqslant\left[l\left(\frac{1}{p}-1\right)\right]$ 是非负整数，其中 $l=\dim M$，则 $H_a^{p,q,s}(M)=H^p(M)$，且

$$\|f\|_{H_a^{p,q,s}}\sim\|f\|_{H^p}.$$

定理3.8的证明需要以下的准备：

引理3.21 设 φ、K_t^{φ} 由引理3.14定义，φ_{+}^{*}、φ_{∇}^{*}、$\varphi_{\nabla}^{\lambda}$ 由定义3.6定义. 又设 $f\in S'(M)$，$0<p\leqslant+\infty$. 若 $\varphi_{+}^{*}(f)\in L^p(M)$，则 $\varphi_{\nabla}^{*}(f)\in L^p(M)$，且存在仅依赖于 p 和 M 的正数 C_p，使得

$$\|\varphi_{\nabla}^{*}(f)\|_p\leqslant C_p\|\varphi_{+}^{*}(f)\|_p.$$

证明 设 $A,\epsilon>0$，λ 是正整数，令

$$u_{\epsilon,A}^{*}(f)(m)=\sup_{d(m,n)<t<1/\epsilon}\left\{|K_t^{\varphi}*f(n)|\left(\frac{t}{t+\epsilon}\right)^A\right\},$$

$$u_{\epsilon,A}^{\lambda}(f)(m)=\sup_{n\in M,0<t<1/\epsilon}\left\{|K_t^{\varphi}*f(n)|\left(\frac{t}{t+\epsilon}\right)^A\left(\frac{t}{d(n,m)+t}\right)^{\lambda}\right\},$$

$$U_{\varepsilon,A}^{*}(f)(m) = \sup_{d(m,n)<t<\frac{1}{\varepsilon}} \left\{ a(t) \left\| \nabla(K_t^{\varphi} * f)(n) \left(\frac{t}{t+\varepsilon}\right)^{A} \right\| \right\},$$

其中∇是 M 上的梯度算子，$\|\ \ \|$由 M 上的 Riemann 度量定义为

$$\|\nabla f\| = g(\nabla f, \nabla f)^{\frac{1}{2}},\ f \in C^{\infty}(M);$$

$a(t)=t$，若$0<t\leqslant R_0$；$a(t)\leqslant 2R_0$，若 $t>R_0$，R_0如引理3.15所定义；$a(t)$是 C^{∞}的.

容易验证 $u_{\varepsilon,A}^{*}(f)(m)\leqslant \varphi_{\nabla}^{*}(f)(m)$及

$$\lim_{\varepsilon\to 0} u_{\varepsilon,A}^{*}(m) = \varphi_{\nabla}^{*}(f)(m), \text{a.e.}$$

由 Fatou 引理，只需证明对任意的 $\varepsilon>0$有下式成立：

$$\|u_{\varepsilon,A}^{*}(f)\|_p \leqslant C_p \|\varphi_{+}^{*}(f)\|_p.$$

因为 $f\in S'(M)$，从而必存在正数 A 和 B，使得

$$\mathrm{Tr}(\hat{f}_\lambda \hat{f}_\lambda^{*})^{\frac{1}{2}} \leqslant B(1+|\lambda+\delta|)^{A-2n-1},$$

其中 f 的 Fourier 级数是

$$f \overset{S'}{=\!=} \sum_{\lambda\in\hat{M}} d_\lambda \mathrm{Tr}(\hat{f}_\lambda T_\lambda(m)).$$

因此可取 A 为正偶数，使得

$$\begin{aligned} |K_t^{\varphi} * f(n)| &\leqslant C\, |||K_t^{\varphi}|||_A \\ &\leqslant C t^{-A} \|\varphi\|_A, \end{aligned}$$

因而 $u_{\varepsilon,A}^{*}(f)\in L^p(M)\cap L^{\infty}(M)$.

与引理3.16和引理3.18的证明相同，可得

$$\begin{cases} u_{\varepsilon,A}^{*}(f)(m) \leqslant C u_{\varepsilon,A}^{\lambda}(f)(m), \\ \|u_{\varepsilon,A}^{\lambda}(f)\|_p \leqslant C_p \|u_{\varepsilon,A}^{*}(f)\|_p, \end{cases} \tag{3.108}$$

其中常数C、C_p仅依赖于 M 和正偶数 $N\geqslant\lambda+1$.

而由定理3.6及定义3.8中定义的 M 上的向量场$\left\{\frac{\partial}{\partial x_r}\right\}$在局部坐标系中都是$C^{\infty}$的，可记

$$K_t^{\varphi}(m) = \Sigma\varphi_{k,t}(m),$$

$$\operatorname{supp}\varphi_{k,t} \subset B\left(m_k, \frac{5}{2}b_0\right),$$

$$\begin{aligned}&(\nabla\varphi_{k,t})(m)\\&\quad=\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\varphi_{k,t}\right)(m),\cdots,\left(\frac{\partial}{\partial x_l}\varphi_{k,t}\right)(m)\right),\end{aligned}$$

其中 $l=\dim M$. 再用引理3.17来表示每个$\left(\frac{\partial}{\partial x_r}\varphi_{k,t}\right)(m)$,可得到当 $\mathrm{d}(m,n)<t$ 时,

$$\begin{aligned}&a(t)\left|\left(\frac{\partial}{\partial x_r}\varphi_{k,t}\right)*f(n)\left(\frac{t}{t+\varepsilon}\right)^{A}\right|\\&\quad\leqslant u^{\lambda}_{\varepsilon,A}(f)(m)\int_0^1\int_K\int_M a(t)\left|H^{s}_{\varepsilon,t}(kp(y)^{-1}\cdot o)\right|\\&\qquad\times\left(\frac{\mathrm{d}(m,p(n)\cdot y)+ts}{ts}\right)^{\lambda}\mathrm{d}y\mathrm{d}k\mathrm{d}s\\&\quad\leqslant 2^{\lambda}u^{\lambda}_{\varepsilon,A}(f)(m)\int_0^1\int_K\int_M a(t)s^{-\lambda}\left|H^{s}_{\varepsilon,t}(kp(y)^{-1}\cdot o)\right|\\&\qquad\times\left(\frac{\mathrm{d}(o,k\cdot y)+t}{t}\right)^{\lambda}\mathrm{d}y\mathrm{d}k\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

这里用到了以下关系式,对 $m,n,y\in M$,有

$$\begin{aligned}&\mathrm{d}(m,p(n)\cdot y)\\&\quad\leqslant\mathrm{d}(m,p(m)\cdot y)+\mathrm{d}(p(m)\cdot y,p(n)\cdot y)\\&\quad=\mathrm{d}(m,p(m)\cdot y)+\mathrm{d}(m,n)\\&\quad=\mathrm{d}(o,y)+\mathrm{d}(m,n),\\&\quad\mathrm{d}(o,y)=\mathrm{d}(o,k\cdot y)=\mathrm{d}(o,kp(y)^{-1}\cdot o)\end{aligned}$$

若 $y\in B(o,3b_0)$.

当 $0<t\leqslant R_0$ 时,取 $u=t$, $a(t)=t$;当 $t>R_0$ 时取 $u=1$, $a(t)=2R_0$,用(3.94)式估计,对 $\varphi_{k,t}$ 又求了一次导,取 N 为正偶数 $N\geqslant\lambda+1$, $\lambda>l/p$,就可得

$$\begin{aligned}&\sup_{\mathrm{d}(m,n)<t<\frac{1}{\varepsilon}}\left\{a(t)\left|\left(\frac{\partial}{\partial x_r}\varphi_{k,t}\right)*f(n)\left(\frac{t}{t+\varepsilon}\right)^{A}\right|\right\}\\&\qquad\leqslant Cu^{\lambda}_{\varepsilon,A}(f)(m).\end{aligned}$$

其中 C 也仅依赖于 M 和 p. 由此即得

$$U_{\varepsilon,A}^{*}(f)(m) \leqslant C_1 u_{\varepsilon,A}^{\lambda}(f)(m). \qquad (3.109)$$

现置

$$E_\varepsilon = \{m \in M, U_{\varepsilon,A}^{*}(f)(m) \leqslant C_0 u_{\varepsilon,A}^{*}(f)(m)\},$$

并置 $E_\varepsilon^c = M \backslash E_\varepsilon$，由(3.108)和(3.109)式可得

$$\begin{aligned}
&\int_{E_\varepsilon^c} (u_{\varepsilon,A}(f)(m))^p \mathrm{d}m \\
&\leqslant \frac{1}{C_0^p}\int_{E_\varepsilon^c} (U_{\varepsilon,A}^{*}(f)(m))^p \mathrm{d}m \\
&\leqslant \frac{1}{C_0^p}\int_M (U_{\varepsilon,A}^{*}(f)(m))^p \mathrm{d}m \\
&\leqslant \frac{C_1^p}{C_0^p}\int_M (u_{\varepsilon,A}^{\lambda}(f)(m))^p \mathrm{d}m \\
&\leqslant \frac{C_1^p C_p^p}{C_0^p}\int_M (u_{\varepsilon,A}^{*}(f)(m))^p \mathrm{d}m \\
&\leqslant \frac{1}{2}\int_M (u_{\varepsilon,A}^{*}(f)(m))^p \mathrm{d}m.
\end{aligned}$$

这就决定了仅依赖于 M 和 p 的正数 C_0 的取法，并得到

$$\int_M (u_{\varepsilon,A}^{*}(f)(m))^p \mathrm{d}m \leqslant 2\int_{E_\varepsilon} (u_{\varepsilon,A}^{*}(f)(m))^p \mathrm{d}m.$$

由 $u_{\varepsilon,A}^{*}(f)$ 的定义，对每个 $m \in E_\varepsilon$，存在$(t_0, \bar{n})$，适合 $\mathrm{d}(m,\bar{n}) < t_0$，及由引理3.15可取到 $t_0 < R_0$，使得

$$|K_{t_0}^{\varphi} * f(\bar{n})| \left(\frac{t}{t+\varepsilon}\right)^A > \frac{1}{2} u_{\varepsilon,A}^{*}(f)(m).$$

而由 $m \in E_\varepsilon$，则有当 $\mathrm{d}(m,z) < t_0$时，

$$a(t_0)\| \nabla(K_{t_0}^{\varphi} * f)(z)\| \leqslant C_0 \left(\frac{t_0}{t_0+\varepsilon}\right)^{-A} u_{\varepsilon,A}^{*}(f)(m).$$

因此若 $\mathrm{d}(m,z) < t_0$，则有

$$a(t_0)\| \nabla(K_{t_0}^{\varphi} * f)(z)\| \leqslant C_2 |K_{t_0}^{\varphi} * f(\bar{n})|,$$

由此可得当 $W \in B(m,t_0) \cap B(\bar{n}, t_0/2C_2)$时有

$$|K_{t_0}^{\varphi} * f(W) - K_{t_0}^{\varphi} * f(\bar{n})| \leqslant \frac{\mathrm{d}(W,\bar{n})}{t_0} \cdot a(t_0)\| \nabla(K_{t_0}^{\varphi} * f)(\xi)\|$$

$$\leqslant \frac{1}{2}|K_{t_0}^{\varphi} * f(\bar{n})|.$$

因此有

$$\varphi_+^*(f)(W) \geqslant |K_{t_0}^{\varphi} * f(W)| \geqslant \frac{1}{2}|K_{t_0}^{\varphi} * f(\bar{n})|$$

$$\geqslant \frac{1}{4}u_{\epsilon,A}^{\lambda}(f)(m).$$

取$0<r<p$，可得

$$\begin{aligned}&(\mathrm{HL}[\varphi_+^*(f)]^r)(m)\\&\geqslant \frac{1}{B(m,t_0)}\int_{B(m,t_0)}(\varphi_+^*(f)(W))^p\mathrm{d}W\\&\geqslant \frac{1}{B(m,t_0)}\int_{B(m,t_0)\cap B(\bar{n},t_0/2c_2)}|K_{t_0}^{\varphi} * f(W)|^p\mathrm{d}W\\&\geqslant C(u_{\epsilon,N}^*(f)(m))^r.\end{aligned}\tag{3.110}$$

其中因为$\mathrm{d}(m,\bar{n})<t_0$，从而存在仅依赖于$M$的正数$c_3$，使得$B(m,t_0)\cap B(\bar{n},t_0/2c_2)$和$B(m,t_0)$体积之比适合

$$\frac{|B(m,t_0)\cap B(\bar{n},t_0/2c_2)|}{|B(m,t_0)|}\geqslant c_3>0.\tag{3.111}$$

因为$r<p$，从而$(\varphi_+^*(f))^r\in L^a(M)$，$a=p/r>1$. 由HL极大函数的性质，并对(3.110)式积分，就证明了本引理. ▌

引理3.22　设$f\in S'(M)$，则有

$$A_\nabla^*(f)(m)\leqslant C\varphi_+^*(f)(m)$$

成立. 其中φ和K_t^{φ}如引理3.14中所定义，C仅依赖于M和λ.

证　在引理3.18证明中用$A_t(m)$代替$K_t^{\varphi}(m)$，用定理3.2或定理3.6计算产生$A_t(m)$的Φ的导数，这时

$$\Phi(h)=B(1+|h|^2)^{-\frac{1}{2}(q+1)},\ q=\mathrm{rank}G.$$

可知$\|\Phi\|_N<+\infty$. 这就同引理3.18的证明一样，可得到引理3.22. ▌

引理3.23　设$f\in S'(M)$，$0<p\leqslant+\infty$. 若$A_+^*(f)\in L^p(M)$，则有$A_\nabla^*(f)\in L^p(M)$. 且存在仅依赖于M和p的正数C_p，使得

$$\|A_\nabla^*(f)\|_p\leqslant C_p\|A_+^*(f)\|_p.$$

证 由引理3.22、引理3.16、引理3.21和引理3.14就可得到引理3.23. ▌

定义 3.13 设 $A_t(m)$是 M 上的 Abel－龚核，$S'(M)$是 $C^\infty(M)$上的广义函数全体组成的广义函数空间，对$0<p\leqslant\infty$，定义 $\hat{H}^p(M)$为

$$\hat{H}^p(M)=\{f\in S'(M),A^*_\nabla(f)\in L^p(M)\}.$$

由引理3.14至引理3.23及定理3.7可得如下定理：

定理 3.9 设 φ,K^p_t 由引理3.14定义，$A_t(m)$是 M 上的 Abel－龚核，则以下各个命题是等价的：

1) $f\in\hat{H}^p(M)$；

2) $f^*_N\in L^p(M)$；

3) $f^*_{0,N}\in L^p(M)$；

4) $\varphi^*_\nabla(f)\in L^p(M)$；

5) $\varphi^*_+(f)\in L^p(M)$；

6) $\varphi^*_T(f)\in L^p(M)$；

7) $A^*_\nabla(f)\in L^p(M)$；

8) $A^*_+(f)\in L^p(M)$.

由定理3.9和§2.3的推论2.1可得如下引理：

引理 3.24 设$1<p\leqslant+\infty$，则 $\hat{H}^p(M)=L^p(M)$. 并且算子 $T:f\to f^*_N$是弱(1,1)型和(p,p)型$(p>1)$的算子.

研究 $\hat{H}^p(M)$与 $H^{p,q,s}_a(M)$的关系，则有如下定理：

定理 3.10 设$0<p\leqslant1\leqslant q\leqslant\infty$，$p\neq q$，$s=\left[l\left(\frac{1}{p}-1\right)\right]$是非负整数，则有

$$H^{p,q,s}_a(M)=\hat{H}^p(M),$$

且有

$$\|f\|_{H^{p,q,s}_a}\sim\|f\|_{\hat{H}^p}$$

成立. 其中$\|f\|_{\hat{H}^p}=\|A^*_\nabla(f)\|_p$.

证明 先证明 $H^{p,q,s}_a(M)\subset\hat{H}^p(M)$，它由下面的引理3.25与引理3.26组成.

引理 3.25　设$0<p\leqslant 1\leqslant q\leqslant\infty$，且$p\neq q$，$s$和$N$均为非负整数，且$s\geqslant\left[l\left(\frac{1}{p}-1\right)\right]$，$N\geqslant s+1$，则存在仅依赖于$M$及$p$、$q$、$s$、$N$的正常数$C$，使对一切的$(p,q,s)$原子或例外原子$a(m)$，$a(m)$的Grand极大函数$a_N^*$适合$\|a_N^*\|_p\leqslant C$.

由引理3.25和$H_a^{p,q,s}(M)$的定义可得如下引理：

引理 3.26　假设同引理3.25，则当$f\in H_a^{p,q,s}(M)$时，存在与引理3.25相同的正数C，使得

$$\|f\|_{\tilde{H}^p}\leqslant C\|f\|_{H_a^{p,q,s}}.$$

由此即得

$$H_a^{p,q,s}(M)\subset\tilde{H}^p(M).$$

引理3.25与引理3.26的证明与欧氏空间中对应的引理的证明相似，例如可见文献[4]的第2章§3中对应的引理的证明，故这里的证明从略.

为证明其反包含关系

$$\tilde{H}^p(M)\subset H_a^{p,q,s}(M),$$

还需要以下各个引理，它们的证明也与欧氏空间中对应引理的证明相似，故在此也从略. 读者仍可从文献[4]的第2章§3中找到证明的方法.

引理 3.27(Whitney 覆盖引理)　设Ω是M中的开集，r_0如同(3.95)式的定义，$\Omega^c=M\backslash\Omega$，则存在点列$\{m_i,m_i\in\Omega\}$和数列$\{r_i,r_i>0\}$，使以下诸结论成立：

(i) $0<r_i\leqslant\frac{1}{3}r_0$;

(ii) $\Omega=\bigcup\limits_i B(m_i,r_i)$，但是$\{B(m_i,r_i/4)\}$是一列互不相交的开测地球列；

(iii) 对一切i，$B(m_i,18r_i)\cap\Omega^c=\varnothing$(空集)；

(iv) 对一切i，当$0<r_i<\frac{1}{3}r_0$时，$B(m_i,54r_i)\cap\Omega^c$非空，当$r_i=\frac{1}{3}r_0$时，存在仅依赖于M的正数$A_1\geqslant 1$，使$B(m_i,54A_1r_i)\cap\Omega^c$

非空；

(v) 存在仅依赖于 M 的正常数 A_0，使得

$$\sum_i \chi_{B(m_i, 18r_i)}(m) \leqslant A_0,$$

其中 χ_E 表示 M 的子集 E 的特征函数.

设 $\theta(X)$是 $\mathfrak{p}$ 上的紧支集 C^∞ 函数，它由下式定义：

$$\theta(X) = \begin{cases} 1, 若\ |X| \leqslant 1; \\ 0, 若\ |X| \geqslant 2; \\ 0 < \theta(X) < 1, 若\ 1 < |X| < 2. \end{cases} \tag{3.112}$$

对 $f \in \widehat{\mathrm{H}}^p(M)$，由定理3.9有 $f_N^* \in L^p(M)$. 而由引理3.15可得：存在正数 $C_0 > 0$，使下式成立：

$$C_0 = \inf_{m \in M} \{f_N^*(m)\} \quad (只要\ f \neq 0). \tag{3.113}$$

因此必存在整数 k_0，使得

$$2^{k_0+1} > C_0 \geqslant 2^{k_0}. \tag{3.114}$$

现在令

$$\Omega_k = \{m \in M, f_N^*(m) > 2^k\}, \tag{3.115}$$

及

$$\Omega_k^c = M \backslash \Omega_k. \tag{3.116}$$

由引理3.27，对每个 $k \geqslant k_0$，存在点列$\{m_i^k\}$和正数列$\{r_i^k\}$，使得引理3.27对 $\Omega = \Omega_k$ 成立. 这时可定义 M 上的 C^∞ 函数

$$\theta_i^k(m) = \theta_i^k(p(m_i^k) \cdot \exp X \cdot o) = \begin{cases} \theta(X/r_i^k), & 若\ |X| < 2r_i^k; \\ 0, & 其余情形. \end{cases} \tag{3.117}$$

则可得到以下引理：

引理3.28 设 $\theta_i^k(m)$由(3.117)式定义. 则有：

(i) $\mathrm{supp}\ \theta_i^k \subset B(m_i^k, 2r_i^k)$；

(ii) $\theta_i^k(m) = 1$，若 $m \in B(m_i^k, r_i^k)$；

(iii) $1 \leqslant \sum_i \theta_i^k(m) \leqslant A_0$，$m \in \Omega_k$.

引理3.29 设 $\theta_i^k(m)$由(3.117)式定义，令

$$\xi_i^k(m)=\theta_i^k(m)\Big/\sum_i\theta_i^k(m),$$

则 $\xi_i^k\in C^\infty(M)$，且有

(i) $0\leqslant\xi_i^k(m)\leqslant 1$，$\sum_i\xi_i^k(m)=\chi_{\Omega_k}(m)$；

(ii) 若 $m\in B(m_i^k,r_i^k/4)$，则 $A_0^{-1}\leqslant\xi_i^k(m)\leqslant 1$；

(iii) 设 $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha$ 由定义3.8定义，则有

$$\sup_{|\alpha|\leqslant N,m\in M}\left\{(r_i^k)^{|\alpha|}\left|\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha\xi_i^k(m)\right|\leqslant C_N,\right.$$

其中 C_N 仅依赖于 N、M 和(3.112)式定义的 $\theta(X)$.

引理3.30　简记 $B_i^k=B(m_i^k,r_i^k)$，$\widetilde{B}_i^k=B(m_i^k,2r_i^k)$，则有

(i) 若 $\widetilde{B}_j^{k+1}\cap\widetilde{B}_i^k\neq\varnothing$，则 $r_j^{k+1}<4r_i^k$，且 $\widetilde{B}_j^{k+1}\subset B(m_i^k,18r_i^k)$；

(ii) 对每个 j，至多有 A_0 个 i 使得

$$\widetilde{B}_j^{k+1}\cap\widetilde{B}_i^k\neq\varnothing.$$

定义3.14　设 $Q_s(M)$ 由(3.6)式定义，对每一对指标 (k,j)，赋予 $Q_s(M)$ 如下的 Hilbert 空间的范数，对 $P\in Q_s(M)$ 令

$$\|P\|=\|P\|_{k,j}=\left(\frac{\int|P(m)|^2\xi_j^k(m)\mathrm{d}m}{\int\xi_j^k(m)\mathrm{d}m}\right)^{\frac{1}{2}},$$

并记 $\{\pi_{j,r}^k=\pi_r,r=1,2,\cdots,\dim_c Q_s(M)\}$ 为 $Q_s(M)$ 关于上面定义的范数 $\|\ \ \|_{k,j}$ 的一组标准正交基.

引理3.31　设 $\{\pi_r\}$ 是定义3.14中关于指标 (k,j) 的一组标准正交基，则存在与 k,j,r 均无关的正数 C_N，使得

$$\sup_{|\alpha|\leqslant N,m\in B_j^k}\left\{(r_j^k)^{|\alpha|}\left|\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha\pi_r(m)\right|\right\}\leqslant C_N,$$

$$\sup_{|\alpha|\leqslant N,m\in M}\left\{(r_j^k)^{|\alpha|}\left|\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha(\pi_r(m)\xi_j^k(m))\right|\right\}\leqslant C_N.$$

将(3.112)式和(3.113)式均在形式上记为

$$\int f(m)\varphi(m)\mathrm{d}m,$$

则有如下引理：

引理3.32 设 $f\in \tilde{H}^p(M)$，$\xi_i^k(m)$由引理3.29定义，则对每个 $f\in \tilde{H}(M)$，存在唯一的 $P_i^k(m)$和 $P_{i,j}^{k+1}(m)$属于 $Q_s(M)$，使之适合对一切的 $Q\in Q_s(M)$，有

$$\int (f(m)-P_i^k(m))Q(m)\xi_i^k(m)\mathrm{d}m=0,$$

以及适合

$$\int (f(m)-P_j^{k+1}(m))Q(m)\xi_i^k(m)\xi_j^{k+1}(m)\mathrm{d}m$$

$$=\int P_{i,j}^{k+1}(m)Q(m)\xi_j^{k+1}(m)\mathrm{d}m,\ \forall\ Q\in Q_s(M).$$

下面来证明引理3.32中的 $P_i^k(m)$和 $P_{i,j}^{k+1}(m)$适合

$$\sup_{m\in B_j^k}\{|P_j^k(m)|\}\leqslant 2^kC, \tag{3.118}$$

$$\sup_{m\in M}\{|P_{i,j}^{k+1}(m)\xi_j^{k+1}(m)|\}\leqslant 2^{k+1}C. \tag{3.119}$$

其中 C 与 k,i,j 无关.

与欧氏空间不同的是，在欧氏空间中，由(3.116)式定义的 Ω_k 一定不等于整个空间，否则，与 $f_N^*\in L^p(R^n)$相矛盾. 但在紧致齐性空间或更一般的紧致 Riemann 流形上，却可以存在某个整数 k_0，使得 $\Omega_{k_0}=M$.

注意到

$$P_j^k(m)=\sum_r\left(\int_M f(m)\pi_r(m)\xi_j^k(m)\mathrm{d}m\Big/\int_M \xi_j^k(m)\mathrm{d}m\right)\overline{\pi_r(m)}, \tag{3.120}$$

现在分 $r_j^k\geqslant \frac{1}{100}r_0$和$0<r_j^k<\frac{1}{100}r_0$两种情形来估计(3.120)式的系数. 当 $r_j^k\geqslant\frac{1}{100}r_0$时，(3.120)式中的被积函数的因子可定义 M 上的 C^∞函数

$$\varphi(p(z)^{-1}m)=\pi_r(m)\xi_j^k(m)\Big/\int_M \xi_j^k(m)\mathrm{d}m, \tag{3.121}$$

适合 supp $\varphi\subset p(z)^{-1}B(m_j^k,2r_j^k)=B(p(z)^{-1}m_j^k,2r_j^k)$. 当在上式中取 $z\in\Omega_k^c$(当 Ω_k^c 非空时，z 是存在的)，由引理3.27的 iii)，就有

$$d(z,m_j^k)=d(o,p(z)^{-1}m_j^k)>18r_j^k\geqslant\frac{18}{100}r_0.$$

在定义3.9中取 $b_0=\frac{1}{20}r_0$，则可取 $S(\mathfrak{p})$ 中的函数 $\Phi_0=0$ 和 $\Phi_k(k=1,2,\cdots,N_0)$，$\operatorname{supp}\Phi_k\subset\widetilde{B}(X_k,2b_0)$ 以及 m_k，$d(o,m_k)>3b_0$，$|X_k|>3b_0$ $(k=1,2,\cdots,N_0)$，使得

$$\Phi_k(X_k+Y)=\begin{cases}\theta(Y/b_0)\varphi(m_k\exp Y\cdot o), & \text{若 } |Y|<2b_0;\\ 0, & \text{若 } |Y|>2b_0.\end{cases}$$

从定义3.9可知，由上面定义的 $\Phi=(\Phi_0,\cdots,\Phi_{N_0})$ 和 Φ_l 就定义了 $\widetilde{K}_l^{\Phi}(m)\in C^\infty(M)$ 适合

$$\widetilde{K}_1^{\Phi}(m)=\varphi(m),$$

其中 $\varphi(m)$ 由(3.121)式定义. 且存在仅依赖于 M 和 N 的正数 A_N，使得

$$\|\Phi\|_{\widetilde{N}}\leqslant A_N\left|\left|\left|\pi_r(\cdot)\xi_j^k(\cdot)\Big/\int_M\xi_j^k(m)\mathrm{d}m\right|\right|\right|_N.$$

由引理3.31和引理3.29，即可得

$$\|\Phi\|_{\widetilde{N}}\leqslant A_NC_N\left(\frac{400}{r_0}\right)^{l+N}\frac{1}{a_0}=C_1,$$

其中 A_N 由前一式给出，C_N 由引理3.31给出，a_0是仅依赖于 M 的正常数，使得

$$(r_j^k)^l\Big/\int_M\xi_j^k(m)\mathrm{d}m\leqslant 4^l/a_0.$$

由此可得

$$\begin{aligned}&\int_M f(m)\pi_r(m)\xi_j^k(m)\mathrm{d}m\Big/\int_M\xi_j^k(m)\mathrm{d}m\\&=\int_M\widetilde{K}_1^{\Phi}(p(z)^{-1}m)f(m)\mathrm{d}m\\&=\widetilde{K}_1^{\Phi}\otimes f(z).\end{aligned}$$

由于上式以及 $z\in\Omega_k$ 可得

$$\begin{aligned}&\left|\int_M f(m)\pi_r(m)\xi_j^k(m)\mathrm{d}m\Big/\int_M\xi_j^k(m)\mathrm{d}m\right|\\&\leqslant\widetilde{\Phi}_{\tilde{N}}^*(f)(z)\leqslant\|\Phi\|_{\widetilde{N}}f_N^*(z)<2^kC.\end{aligned}\tag{3.122}$$

当 $r_j^k<\frac{1}{100}r_0$时，记 $t_0=100r_j^k/r_0$，取一点 z，$z\in B(m_j^k,54r_j^k)\cap\Omega_k^c$. 这时，当 $m\in p(z)^{-1}B(m_j^k,2r_j^k)$时，就有

$$\mathrm{d}(o,m)\leqslant \mathrm{d}(z,m_j^k)+2r_j^k<56r_j^k<\frac{56r_0}{100}<\frac{2}{3}r_0,$$

定义 $\Phi=(\Phi_0,\cdots,\Phi_{N_0})\in S(\mathfrak{p})^{N_0+1}$，适合 $\Phi_k\equiv 0$，$(k=1,2,\cdots,N_0)$ 及

$$\Phi_0\left(\frac{X}{t_0}\right)=\begin{cases}\left(\frac{100}{r_0}\right)^l\pi_r\left(p(z)\exp\frac{X}{t_0}\cdot o\right)\xi_j^k\left(p(z)\exp\frac{X}{t_0}\cdot o\right),\\ \quad 若\left|\frac{X}{t_0}\right|<\frac{2}{3}r_0;\\ 0,\ 若\left|\frac{X}{t_0}\right|\geqslant\frac{2}{3}r_0.\end{cases}$$

则 $\Phi_0(X)$与 Φ、Φ_l 都定义好了. 且易验证

$$\widetilde{K}_{t_0}^{\Phi}(p(z)^{-1}m)=(r_j^k)^{-l}\pi_r(m)\xi_j^k(M),$$

这就得到

$$\begin{aligned}&\int_M f(m)\pi_r(m)\xi_j^k(m)\mathrm{d}m\Big/\int_M\xi_j^k(m)\mathrm{d}m\\ &\quad=\left(\frac{r_0}{100}\right)^l\int_M\widetilde{K}_{t_0}^{\Phi}(p(z)^{-1}m)f(m)\mathrm{d}m(r_j^k)^l\Big/\int_M\xi_j^k(m)\mathrm{d}m\\ &\quad=\left\{\left(\frac{r_0}{100}\right)^l(r_j^k)^l\Big/\int_M\xi_j^k(m)\mathrm{d}m\right\}\widetilde{K}_{t_0}^{\Phi}\otimes f(z).\end{aligned}$$

对上式用与(3.122)式相同的方法估计，得

$$\begin{aligned}&\left|\int_M f(m)\pi_r(m)\xi_j^k(m)\mathrm{d}m\Big/\int_M\xi_j^k(m)\mathrm{d}m\right|\\ &\qquad\leqslant\frac{1}{a_0}4^l\left(\frac{100}{r_0}\right)^l\left|\widetilde{K}_{t_0}^{\Phi}\otimes f(z)\right|\leqslant 2^kC.\qquad(3.123)\end{aligned}$$

将上式和(3.122)式及引理3.31用于(3.120)式的估计，就得到(3.118)式成立.

而由(3.118)式及其证明方法以及

$$P_{i,j}^{k+1}(m)=\sum_r\left(\int_M(f-P_j^{k+1})\pi_r\xi_i^k\xi_j^{k+1}\mathrm{d}m\Big/\int_M\xi_j^{k+1}\mathrm{d}m\right)\bar{\pi}_r,$$

就可证明(3.119)式为真.

设 k_0 由(3.114)式定义，当 $k=k_0$ 时，取一点 $m_0\in\Omega_{k_0+1}$，并重新置 Ω_{k_0} 为

$$\Omega_{k_0}=M\setminus\{m_0\},$$

则以上的证明对 $k=k_0$ 时也成立. 对 $f\in L^2(M)$ 令

$$g^k=f\chi_{\Omega_k^c}-\sum_i P_i^k\xi_i^k=\sum_i(f-P_i^k)\xi_i^k, \tag{3.124}$$

$$b^k=f\chi_{\Omega_k^c}+\sum_i P_i^k\xi_i^k.$$

则有 $f=g^k+b^k$, $k\geqslant k_0$. 因为 $\Omega_{k_0}=\{m_0\}$，在 $L^2(M)$ 意义下 $f\chi_{\Omega_{k_0}^c}=0$. 因此，由引理3.27的(Ⅴ)知 $b^{k_0}(m)$ 是 M 上的 C^∞ 函数，且有

$$|b^{k_0}(m)|=\left|\sum_i P_i^{k_0}\xi_i^{k_0}(m)\right|\leqslant 2^{k_0}C\sum_i\xi_i^{k_0}(m)$$

$$=2^{k_0}C,$$

即 $(2^{k_0}C)^{-1}b^{k_0}(m)$ 是一个例外原子.

又因为 $\operatorname{supp}g^k\subset\Omega_k$，而 Ω_k 的测度 $|\Omega_k|$ 适合

$$|\Omega_k|\leqslant(C\|f_N^*\|_p/2^k)^p\to 0,\quad k\to+\infty.$$

由此可得

$$\lim_{k\to+\infty}g^k(m)=0,\ \text{a.e.} \tag{3.125}$$

引理3.33　对每个 $k\in\mathbf{Z}$ 有

$$\sum_{i,j}P_{i,j}^{k+1}(m)\xi_j^{k+1}(m)=0.$$

其中等式在广义函数意义下均收敛.

由(3.124)式、(3.125)式和引理3.33，记

$$\begin{aligned}
g^k-g^{k+1}&=\sum_i(f-P_i^k)\xi_i^k-\sum_j(f-P_j^{k+1})\xi_j^{k+1}\\
&=\sum_i(f-P_i^k)\xi_i^k-\sum_{i,j}(f-P_j^{k+1})\xi_i^k\xi_j^{k+1}\\
&=\sum_i(f-P_i^k)\xi_i^k-\sum_{i,j}\left[(f-P_j^{k+1})\xi_i^k-P_{i,j}^{k+1}\right]\xi_j^{k+1}\\
&=\sum_i\left\{(f-P_i^k)\xi_i^k-\sum_j\left[(f-P_j^{k+1})\xi_i^k-P_{i,j}^{k+1}\right]\xi_j^{k+1}\right\}
\end{aligned}$$

$$= \sum_i h_i^k,$$

就可得

$$f(m) = \sum_{k=k_0}^{\infty} \{g^k(m) - g^{k+1}(m)\} + b^{k_0}(m)$$

$$= \sum_{k\geqslant k_0} \sum_j h_j^k(m) + b^{k_0}(m), \text{ a.e.}$$

易见 $\operatorname{supp} h_i^k \subset \tilde{B}_i^k$，而由引理3.32又有

$$\int_M h_j^k(m) Q(m) \mathrm{d}m = 0, \ \forall\, Q \in Q_s(M),$$

再由(3.118)式、(3.119)式及

$$h_i^k = f\xi_i^k \chi_{\Omega_k} - P_i^k \xi_i^k + \xi_i^k \sum_j P_j^{k+1} \xi_j^{k+1}$$

$$+ \sum_j P_{i,j}^{k+1} \xi_j^{k+1},$$

以及 $\xi_j^{k+1}(m) \neq 0$的项不超于 A_0个，而 $f \in L^2(M)$时必有 $|f(m)| \leqslant f_N^*(m)$，可得

$$|h_i^k(m)| \leqslant 2^k C_0, \text{ a.e.}$$

取 $\lambda_i^k = 2^k C_0 |\tilde{B}_i^k|^{1/p}$，$a_i^k(m) = h_i^k(m)/\lambda_i^k$，则每个 a_i^k 都是一个(p,∞,s)原子，且有

$$\sum_{k,i} |\lambda_i^k|^p \leqslant C_0^p \sum_{k,i} 2^{kp} |\tilde{B}_i^k| \leqslant C \sum_k 2^{kp} |\Omega_k|$$

$$\leqslant C \sum_k \int_{2^{k-1}}^{2^k} p\alpha^{p-1} |\{m : f_N^*(m) > \alpha\}| \mathrm{d}\alpha$$

$$\leqslant C \|f_N^*\|_p^p$$

成立. 这就证明了当所有 $g^k(m)$，$k \geqslant k_0$都不等于零时，对于 $f \in \tilde{H}^p(M) \cap L^2(M)$，$f$ 可以表示成

$$f(m) = \sum_{k,i} \lambda_i^k a_i^k(m) + \lambda_0 b_0(m),$$

其中 $a_i^k(m)$是正则的(p,∞,s)原子，$b_0(m)$是例外原子，且适合

$$|\lambda_0|^p + \sum_{k,i} |\lambda_i^k|^p \leqslant C \|f_N^*\|_p^p.$$

而当 f 适合 $C_0 \leqslant f_N^*(m) \leqslant C_1 < +\infty$，$m \in M$ 时，上面的 f 的原子

分解式仍然成立.这时必有 $f\in L^{\infty}(M)\subset \mathrm{L}^2(M)$,且存在整数 $k_1\geqslant k_0$,使得当 $k>k_1$ 时,$g^k(m)\equiv 0$,$b^k(m)\equiv 0$,因此对应的 $h_i^k(m)\equiv 0$.但上面的结论仍然成立.所以对一切的 $f\in \tilde{H}^p(M)\cap \mathrm{L}^2(M)$,$f$ 的原子分解已经给定.这就得到了当$0<p\leqslant 1$时,

$$\mathrm{L}^2(M)=\tilde{H}^p(M)\cap \mathrm{L}^2(M)\subset H_a^{p,\infty,s}(M)$$
$$\subset H_a^{p,q,s}(M).$$

现在因为 $\mathrm{L}^2(M)$在 $\tilde{H}^p(M)$ $(0<p\leqslant 1)$中是稠密的,所以对每个 $f\in \tilde{H}^p(M)$,必存在一列 $\mathrm{L}^2(M)$中的函数

$$f_k(m)\in \mathrm{L}^2(M),k=1,2,\cdots$$

使下式成立:

$$\|f-f_k\|_{\tilde{H}^p}\to 0,\ k\to\infty.$$

不妨可认为

$$\|f_1\|_{\tilde{H}^p}^p\leqslant \frac{3}{2}\|f\|_{\tilde{H}^p}^p,$$
$$\|f_{k+1}-f_k\|_{\tilde{H}^p}^p\leqslant 2^{-k-1}\|f\|_{\tilde{H}^p}^p,\ k=1,2,\cdots,$$

否则,抽子列即可,记 $g_1=f_1$,$g_k=f_k-f_{k-1}$,$k>1$,则

$$f=\sum_{k=1}^{\infty}g_k$$

在 $\tilde{H}^p(M)$中成立.因为每个 $g_k\subset \tilde{H}^p(M)\cap \mathrm{L}^2(M)$,从而有

$$g_k=\sum_j \lambda_j^k a_j^k,$$

且有

$$\sum_j|\lambda_j^k|^p\leqslant C\|g_k\|_{\tilde{H}^p}^p,$$

式中 C 与 k 无关;g_k 等式中的 a_j^k 为(p,∞,s)原子.因此有

$$f=\sum_{k,j}\lambda_j^k a_j^k,$$

且

$$\sum_{k,j}|\lambda_j^k|^p\leqslant \sum_k C\|g_k\|_{\tilde{H}^p}^p\leqslant C\|f\|_{\tilde{H}^p}^p, \tag{3.126}$$

即 $f\in \tilde{H}^p(M)$就有 $f\in H_a^{p,\infty,s}(M)$.这就证明了

$$\tilde{H}^p(M)\subset H_a^{p,\infty,s}(M)\subset H_a^{p,q,s}(M). \tag{3.127}$$

由引理3.26、(3.127)式和(3.126)式,就得到了定理.于是完成了定理3.10的证明. ∎

定理3.8的证明需要用到下面的截极大函数.

定义3.15 设 $P_t(m)$、$A_t(m)$分别是 M 上的 Poisson 核与 Abel一龚核,$\Phi\in S_I(\mathfrak{h})$和 $K_t^{\varphi}(m)$与定义3.6中的相同,$f\in S'(M)$,$\varepsilon>0$,定义

$$P_{\varepsilon,\nabla}^{*}(f)(m)=\sup_{(t,n)\in\Gamma(m),0<t<\varepsilon}\{|P_t*f(n)|\},$$

$$P_{\varepsilon,+}^{*}(f)(m)=\sup_{0<t<\varepsilon}\{|P_t*f(m)|\},$$

$$A_{\varepsilon,\nabla}^{*}(f)(m)=\sup_{(t,n)\in\Gamma(m),0<t<\varepsilon}\{|P_t*f(n)|\},$$

$$A_{\varepsilon,+}^{*}(f)(m)=\sup_{0<t<\varepsilon}\{|A_t*f(m)|\},$$

$$\Phi_{\varepsilon,\nabla}^{*}(f)(m)=\sup_{(t,n)\in\Gamma(m),0<t<\varepsilon}\{|K_t^{\varphi}*f(n)|\},$$

$$\Phi_{\varepsilon,\nabla}^{*}(f)(m)=\sup_{0<t<\varepsilon}\{|K_t^{\varphi}*f(m)|\}.$$

有了上面的准备,就可证明定理3.8.

定理3.8的证明 本定理的证明可归结为对 $P_{\nabla}^{*}(f)$、$P_{+}^{*}(f)$、$P_{T}^{\lambda}(f)$之间的关系以及它们与 $A_{+}^{*}(f)$、f_N^{*} 之间关系的研究,可归结为以下的几个引理:

引理3.34 设 $f\in S'(M)$,则当 f 不是常值函数时,存在 $R_1>R_0$,使得

$$\sup_{t>R_1,m\in M}\{|P_t*f(m)|\}<\inf_{m\in M}\{P_{\nabla}^{*}(f)(m)\},$$

$$\sup_{t>R_1,m\in M}\{|A_t*f(m)|\}<\inf_{m\in M}\{A_{\nabla}^{*}(f)(m)\}.$$

若记 $C_0(f)=\int_M f(m)\mathrm{d}m$ 或$\langle f,1\rangle$,则当 $C_0(f)=0$且 $f\neq 0$时,对任意的 $A>1$,存在 $R=R(A)$,使得

$$\sup_{t>R,m\in M}\{|P_t*f(m)|\}<\frac{1}{A}\inf_{m\in M}\{P_{\nabla}^{*}(f)(m)\},$$

$$\sup_{t>R,m\in M}\{|A_t*f(m)|\}<\frac{1}{A}\inf_{m\in M}\{A_{\nabla}^{*}(f)(m)\}.$$

证明 由引理3.15,对一切 $n\in M$ 有下式成立:

$$|P_{R_0} * f(n)| \leqslant \inf_{m\in M}\{P_{\triangledown}^{*}(f)(m)\} \equiv A_0.$$

再由 § 3.1的命题3.1，当 $t>R_0$时，必有

$$|P_t * f(m)| \leqslant A_0,\ \ m\in M.$$

否则，f 必为常值函数，取 $R_1>R_0$即可.

同样地，对一切 $n\in M$，有

$$|A_{R_0} * f(n)| \leqslant \inf_{m\in M}\{A_{\vee}^{*}(f)(m)\} \equiv B_0$$

成立. 记 $A_{R_0} * f(m)$的 Fourier 级数为

$$A_{R_0} * f(m) = \sum_{\lambda\in\hat{M}} \mathrm{e}^{-R_0|\lambda+\delta|} d_\lambda \mathrm{Tr}(\hat{f}_\lambda T_\lambda(m)),$$

当 $\delta=0$时 M 为环群；当 $\delta\neq 0$时，就有

$$\|A_{R_0} * f\|_2 = \left(\sum_{\lambda\in\hat{M}} \mathrm{e}^{-2R_0|\lambda+\delta|} d_\lambda \mathrm{Tr}(\hat{f}_\lambda \hat{f}_\lambda^{*})\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant B_0.$$

由此可得

$$\begin{aligned}
&|A_t * f(m)| \\
&= \left|\sum_{\lambda\in\hat{M}} \mathrm{e}^{-t|\lambda+\delta|} d_\lambda \mathrm{Tr}(\hat{f}_\lambda T_\lambda(m))\right| \\
&\leqslant \sum_{\lambda\in\hat{M}} \mathrm{e}^{-t|\lambda+\delta|} d_\lambda^{\frac{3}{2}} \mathrm{Tr}(\hat{f}_\lambda \hat{f}_\lambda^{*})^{\frac{1}{2}} \\
&\leqslant \left(\sum_{\lambda\in\hat{M}} \mathrm{e}^{-2(t-R_0)|\lambda+\delta|} d_\lambda^{2}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad \times \left(\sum_{\lambda\in\hat{M}} \mathrm{e}^{-2R_0|\lambda+\delta|} d_\lambda \mathrm{Tr}(\hat{f}_\lambda \hat{f}_\lambda^{*})\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leqslant \left(\sum_{\lambda\in\hat{M}} \mathrm{e}^{-2(t-R_0)|\lambda+\delta|} d_\lambda^{2}\right)^{\frac{1}{2}} B_0.
\end{aligned}$$

因为 $\delta\neq 0$，上式中最后一个不等式右端括号中的和式在 $t\to+\infty$时趋于零. 因而可分别取 $R_1>R_0$和 $R=R(A)>R_0$，使引理的第二个和第四个不等式成立. 而当 $C_0(f)=0$时，用上面的估计方法就可使得引理的第三和第四两个不等式成立. 这就完成了引理

的证明. ▌

由引理3.34可得

$$P^*_\nabla(f)(m)=P^*_{R_0,\nabla}(f)(m),$$

其中 R_0如引理3.15中所定义. 因此,由引理3.17,可将 $P_t(m)$表示成

$$P_t(m)=\int_0^1 K^\varphi_{ut}*H^{(s)}_{u,t}(m)\mathrm{d}s.$$

用定理3.1中的(1)的 $P_t(m)$由 $A_t(m)$表示的渐近表示式来估计 $H^{(s)}_{u,t}(m)$,在$0<t\leqslant R_0$时,取 $u=t$,由定理3.2的导数估计,就可得

$$P^*_{R_0,\nabla}(f)(m)\leqslant c\varphi^+_T(f)(m).$$

再由定理3.10,就得到

$$\widetilde{H}^p(M)\subset H^p(M).$$

将引理3.14中的 $A_t(m)$换成 $P_t(m)$,并将相应的函数记为

$$K^\varphi_t(m)=\int_1^\infty \psi(s)P_{ts}(m)\mathrm{d}s,$$

且同定义3.6一样定义 $\psi^*_+(f)$、$\psi^*_\nabla(f)$和 $\psi^+_T(f)$. 虽然没有 $K^\varphi_t(m)$可由一个 $S_T(\mathfrak{h})$上的函数由 $\Pi_3\circ\Pi_0$产生,但是容易验证引理3.14、引理3.16、引理3.17及它的(3.94)式和引理3.18均对应成立. 从而可得

$$\begin{aligned}\|P^*_+(f)\|_p&\geqslant C\|P^*_\nabla(f)\|_p\geqslant C\|\psi^*_+(f)\|_p\\&\geqslant C_1\|\psi^*_\nabla(f)\|_p\geqslant C_2\|\psi^+_T(f)\|_p\geqslant C_3\|\varphi^*_\nabla(f)\|_p\\&\geqslant C_4\|\varphi^+_T(f)\|_p\geqslant C_5\|A^*_\nabla(f)\|_p.\end{aligned}$$

这就证明了

$$H^p(M)\subset\widetilde{H}(M).$$

而由定理3.10,就得到了定理3.8. ▌

说明:直接用 $P_t(m)$或 $A_t(m)$代替 $K^\varphi_t(m)$,上面各个定理仍然成立. 这里主要由定理3.1、定理3.2和定理3.6及引理3.34,就可按上面对引理3.14给出的 $K^\varphi_t(m)$所作的证明. 同样应用于用 $P_t(m)$或 $A_t(m)$代替 $K^\varphi_t(m)$的证明即可. 与在欧氏空间的证明不同的是,上面的证明强烈地依赖于 Laplace-Beltrami 算子和$P_t(m)$及

$A_t(m)$适合的微分方程.

注意到对任意的 $\epsilon>0$,有

$$\sup_{t\geqslant\epsilon,m\in M}\{|P_t*f(m)|\}<+\infty,$$

且在上式中用 $A_t(m)$、$K_t^\varphi(m)$代替 $P_t(m)$仍成立,就可得到如下定理:

定理3.11　设 φ、K_t^φ 由引理3.14定义,$P_t(m)$和 $A_t(m)$分别是 M 的 Poisson 核和 Abel－龚核,则以下各个命题与 $f\in H^p(M)$等价 $(0<p\leqslant1)$:

(1) $f\in H_a^{p,q,s}(M)$,$0<p\leqslant1\leqslant q\leqslant+\infty$,$p\neq q$;

(2) $f_N^*\in L^p(M)$;

(3) $f_{0,N}^*\in L^p(M)$;

(4) $\varphi_\nabla^*(f)\in L^p(M)$,$\varphi$由引理3.14定义;

(5) $\varphi_l^*(f)\in L^p(M)$,$l>p/\lambda$,$l=\dim M$;

(6) $\varphi_+^*(f)\in L^p(M)$;

(7) $\varphi_{\epsilon,\nabla}^*(f)\in L^p(M)$;

(8) $\varphi_{\epsilon,+}^*(f)\in L^p(M)$;

(9) $P_\nabla^*(f)\in L^p(M)$;

(10) $P_{\epsilon,\nabla}^*(f)\in L^p(M)$;

(11) $P_+^*(f)\in L^p(M)$;

(12) $P_{\epsilon,+}^*(f)\in L^p(M)$;

(13) $A_\nabla^*(f)\in L^p(M)$或 $A_{\epsilon,\nabla}^*(f)\in L^p(M)$;

(14) $A_+^*(f)\in L^p(M)$;

(15) $A_{\epsilon,+}^*(f)\in L^p(M)$.

第 4 章

在多复变函数论中的某些应用

前三章中的理论和方法，在多复变函数论的研究中，有着重要的应用．全面叙述前三章的内容在多复变函数论中的应用，超出了本书的内容，在本章中仅就多复变有界对称域上的几个课题，作一初步的介绍．

在§4.1中简述多复变有界对称域的 Harish-Chandra 模型、Bergman 核 $K(z,\overline{w})$、Poisson－华核 $P(z,U)$ 以及 Cauchy 核 $H(z,U)$．有界对称域的多复变函数论的一系列的重要课题，都可用 Harish-Chandra 模型进行讨论并予以解决．

在§4.2中讨论有界对称域的 Bergman 核 $K(z,\overline{w})$．C^n 中有界域的 Bergman 核起着根本而重要的作用．对于 C^n 中的有界对称域，它的 Poisson－华核与 Cauchy 核可用 Bergman 核简洁表示出来．

在§4.3中讨论有界对称域的 Poisson－华核与 Cauchy 核，并用 Bergman 核给出 Poisson－华核与 Cauchy 核的具体而简洁的表达式．

在§4.4中讨论第一类典型域 $R_I(n,n)$ 上 Poisson－华核与 Cauchy 核的边界性质，限于篇幅关系，关于 Poisson－华核与 Cauchy 核的边界性质的一般性讨论，这里就不作介绍了．

§4.1　多复变的有界对称域及其核函数

设 $D\subset C^n$ 是 C^n 中的有界对称域，则 D 必然是某个非紧型

Hermite 对称空间 G/K 的一个有界实现，其中 G 是一个非紧致、连通、具有有限中心的半单李群，K 是 G 的一个极大紧子群.

在非紧型 Hermite 对称空间 G/K 的有界实现中，最重要的是 Harish-Chandra 的标准实现，记 G/K 的 Harish-Chandra 的标准实现为

$$\xi_0: G/K \to D \subset C^n,$$
$$m \in G/K \to z = \xi_0(m) \in D. \tag{4.1}$$

则 C^n 中的任意一个有界对称域必然与某个由(4.1)式表示的 Harish-Chandra 标准实现全纯同胚.

4.1.1　Harish-Chandra 标准实现的模型

当 $D\subset C^n$ 是 Hermite 对称空间 G/K 的 Harish-Chandra 的标准实现时，它可用统一的方式表示成 C^n 中的如下形式的有界域：

$$D = \{z = (\lambda_1, \cdots, \lambda_r, 0, \cdots, 0)\pi(k)' \in C^n,$$
$$|\lambda_j| < 1, k \in K\}. \tag{4.2}$$

其中 $\lambda_j\in R, j=1,2,\cdots,r$，$r$ 是 G/K 的秩，π 是 K 在 C^n 上的一个适当的酉表示，且 $\pi(k)$ $(k\in K)$是酉方阵，$\pi(k)'$ 表示矩阵 $\pi(k)$的转置矩阵.

为了具体给出非紧型 Hermite 对称空间 G/K 的 Harish-Chandra 实现 ξ_0 和(4.2)式的 D 之间的具体联系，则要应用半单李群 G 的 Iwasawa 分解与 Cartan 分解.

设 G 是上面所述的非紧半单李群，$\mathfrak{g}$ 是 G 的李代数；K 是 G 的极大紧子群，$\mathfrak{k}$ 是 K 对应的 $\mathfrak{g}$ 的一个极大紧致子代数；exp：$\mathfrak{g}\to G$是指数映射，$\mathfrak{g}$ 和 G 的 Iwasawa 分解是：

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n},\ G = KAN, \tag{4.3}$$

其中

$$K = \exp\mathfrak{k},\ A = \exp\mathfrak{a},\ N = \exp\mathfrak{n}.$$

而 $\mathfrak{g}$ 和 G 的 Cartan 分解是

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p},\ G = PK = KP, \tag{4.4}$$

其中 $P=\exp\mathfrak{p}$，且(4.3)式中的 $\mathfrak{a}$ 是 $\mathfrak{p}$ 的一个极大的 Abel 子空间，$\mathfrak{a}$ 的实维数就是 G/K 的秩，也就是(4.2)式中的 r.

每个 $p\in P$ 又具有如下的分解：

$$p = kak^{-1},\ p\in P,\ k\in K,\ a\in A. \tag{4.5}$$

所以又称 $G=KAK$ 为 G 的 Cartan 分解.

当 G/K 是上述非紧致型 Hermite 对称空间时，G 中元 $g\in G$ 在 G/K 上的作用为

$$g: G/K \to G/K,$$
$$m\in G/K \to g\cdot m\in G/K, \tag{4.6}$$

是 G/K 到自身的全纯同胚，又称 $g\in G$ 是 G/K 的全纯自同构. 记 o 是 G/K 的幺元的傍系，则(4.6)式就诱导了(4.4)式中的 P 到 G/K 上的微分同胚：

$$P\to G/K,\ p\in P\to m = p\cdot o\in G/K. \tag{4.7}$$

由(4.7)式，就可用 G 中的群的乘法来表示 $g\in G$ 在 G 上产生的全纯自同构如下：

$$g\cdot m = gp\cdot o,\ m = p\cdot o,\ m\in G/K,\ p\in P. \tag{4.8}$$

G 中的元在 G/K 上的作用通过 Harish-Chandra 实现 ξ_0，自然地诱导了 $g\in G$ 在(4.2)式表示的 D 上产生的 D 到自身的全纯同胚(或称为 D 的全纯自同构)，它可具体表示为：

$$\phi_g(z) = g\cdot z \equiv \xi_0(g\cdot m),$$
$$z = \xi_0(m)\in D, m\in G/K. \tag{4.9}$$

其中 $\phi_g(z)$ 或 $g\cdot z$ 是 $g\in G$ 在 D 上产生的全纯自同构的两种不同的表示方式.

如所熟知，可在 $\mathfrak{a}$ 中选择一组适当的等长正交基

$$(X_1, X_2, \cdots, X_r), \tag{4.10}$$

其中 r 是 $D=G/K$ 的秩，则每个 $X\in\mathfrak{a}$ 就具有如下的坐标表示：

$$\begin{cases} X = x_1X_1 + x_2X_2 + \cdots + x_rX_r, \\ \qquad X\in\mathfrak{a},\ x_j\in R; \\ \lambda_j = \tanh x_j,\ j = 1,2,\cdots,r; \\ \lambda = (\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r,0,\cdots,0)\in C^n. \end{cases} \tag{4.11}$$

应用(4.11)式，就可将(4.1)式的 ξ_0 具体写出如下：

$$\xi_0(m) = \xi_0(p\cdot o) = \xi_0(kak^{-1}\cdot o) = \xi_0(ka\cdot o)$$

$$= \xi_0(a \cdot o)\pi(k)' = \xi_0(\exp X \cdot o)\pi(k)'$$

$$= \lambda\pi(k)' = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r, 0, \cdots, 0)\pi(k)', \qquad (4.12)$$

其中 $a=\exp X$，$X\in\mathfrak{a}$，X，λ_j，λ 的关系由(4.11)式确定.

4.1.2 有界域的 Bergman 核与 Cauchy 核

设 $D\subset C^n$ 是 C^n 中的有界域，$H^2(D)$是关于 D 的欧氏测度 $dV(z)$平方可积的 D 上的全纯函数的全体构成的 Hilbert 空间. 设

$$\{\varphi_1(z), \varphi_2(z), \cdots\} \qquad (4.13)$$

是 $H^2(D)$的一组完备标准正交函数系，则

$$K(z,\overline{w}) = \sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(z)\,\overline{\varphi_n(w)},\ \ z,w\in D \qquad (4.14)$$

是 D 的 Bergman 核函数.

D 的 Bergman 核函数有以下的性质：

(1) (4.14)式等式右端的级数在 $D\times D$ 上内闭一致收敛.

(2) $K(z,\overline{w})$与 $H^2(D)$的完备标准正交函数系(4.13)的选取无关.

(3) 设 D 和 D'均是 C^n 中的有界域，$K(z,w)$与 $K'(\xi,\eta)$分别是 D 和 D'的 Bergman 核函数，$\phi: D\to D'$是全纯同胚，$J_\phi(z)$是映射 ϕ 在 $z\in D$ 点的复 Jacobi 矩阵，则有

$$K(z,\overline{w}) = K'(\phi(z),\overline{\phi(w)})\det J_\phi(z)\,\overline{\det J_\phi(w)}$$

$$(z、w\in D). \qquad (4.15)$$

当 D 是包含原点的 C^n 中单连通的有界圆型域，S 是 D 的 Silov 边界，且 S 也是圆型的时，D 的 Bergman 核函数具有以下的性质：

(4) (4.13)中的每个 $\varphi_n(z)$均可取为 z 的齐次多项式.

(5) 对每个 $w\in D$，存在 $C(w)>1$，使得 $K(z,\overline{w})$作为 z 的函数在 $C(w)D$ 上关于 z 全纯；同样地，对每个 $z\in D$，$K(z,\overline{w})$作为 w 的函数在 $C(z)D$ 上关于 w 共轭全纯，且 $C(z)$是 D 上的连续函数.

华罗庚在他的名著[1]中证明了：

(6) 存在由 z 的齐次多项式组成的 $H^2(D)$的完备标准正交函

数系(4.13)和一组正数 $a_1, a_2, \cdots$，使得

$$\{a_1\varphi_1(U), a_2\varphi_2(U), \cdots, U \in S\} \tag{4.16}$$

是 $L^2(S)$的一组标准正交函数系，但它不是完备的.

记(4.16)式在 $L^2(S)$中张成的复的闭子空间为 $HL^2(S)$，则 $HL^2(S)$是一个 Hilbert 空间，且(4.16)是 $HL^2(S)$的完备标准正交函数系.

在文献[1]中华罗庚定义了上述 C^n 中圆型域的 Cauchy 核为

$$H(z,\overline{U}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \varphi_n(z) \overline{\varphi_n(U)},$$

$$z \in D, U \in S, \tag{4.17}$$

他证明了 $H(z,\overline{w})$作为 $D\times D$ 上的函数时，Bergman 核的性质(1)和(5)对 $H(z,\overline{w})$同样成立.

4.1.3 有界对称域的核函数

当 D 是非紧型 Hermite 对称空间 G/K 的标准实现表示成(4.2)式的形式时，简记为 $D=G/K\subset C^n$. 这时 D 必是以原点为中心的单连通的圆型有界域，D 的 Bergman 核 $K(z,\overline{w})$和 Cauchy 核具有进一步的性质，对于 D 的 Bergman 核有：

(7) 设 $z,w\in D, k\in K, k\cdot z$，由(4.9)式定义，则有

$$K(k\cdot z, \overline{k\cdot w}) = K(z,\overline{w}), z、w \in D, k \in K, \tag{4.18}$$

而由(4.2)式、(4.11)和(4.12)式又可得

$$K(z,\overline{z}) = K(\lambda,\lambda),$$

$$z = k\cdot\lambda,\ \lambda = \xi_0(a\cdot o),\ a\in A. \tag{4.19}$$

(8) 对 $z、w\in D, g\in G$，ϕ_g 由(4.9)式定义，适合 $\phi_g(z)=0$，$J_{\phi_g}(w)$是 ϕ_g 在 $w\in D$ 的复 Jacobi 矩阵，则有

$$K(z,\overline{w}) = K(0,0)\det J_{\phi_g}(z)\overline{\det J_{\phi_g}(w)}. \tag{4.20}$$

在文献[1]中华罗庚用李群的观点对单位圆上的 Poisson 核作了新的解释，由此定义了有界对称域的相应的核，华罗庚仍称它为 Poisson 核. 华罗庚给出的定义如下：设 $\phi_g, g\in G$ 是 D 的全纯自同构，适合 $\phi_g(z)=0$，ϕ_g 同样是 D 的 Silov 边界 S 到自身的微分同

胚，记 ϕ_g 在 $U\in S$ 点的实 Jacobi 矩阵为 $J_g(U)$，且 $J_g(U)$ 是在 C^n 的欧氏内积决定的 S 的各点处的法坐标系进行的计算，则

$$P(z,U) = |\det J_g(U)|, \phi_g(z) = 0,$$

就是 D 的 Poisson 核. 在文献[1]中华罗庚证明了，D 的 Poisson 核 $P(z,U)$ 与 Cauchy 核 $H(z,\overline{U})$ 有如下的关系：

$$P(z,U) = H(z,\overline{U})H(U,\bar{z})/H(z,\bar{z}). \tag{4.21}$$

华罗庚关于 Poisson 核的这一思想早于国外同行多年，且他发现的关系式(4.21)式更早于国外同行多年，所以人们称华罗庚定义的 Poisson 核为 Poisson—华核.

4.1.4　不可约的有界对称域与典型域

若非紧型 Hermite 对称空间是不可约的，就称 $D=G/K\subset C^n$ 是不可约的. 这时 G 是一个单李群，它的李代数 $\mathfrak{g}$ 是一个实单李代数，$\mathfrak{g}$ 的复化 $\mathfrak{g}^C$ 是一个复单李代数；而(4.2)式中的表示 π 则是 K 在 C^n 上的不可约酉表示.

若 $D=G/K\subset C^n$ 可约，则 D 必可分解成不可约的有界对称域的直积，且 D 的核函数 $K(z,\overline{w})$、$P(z,U)$ 和 $H(z,\overline{U})$ 是每个不可约域的对应的核函数的乘积. 因此，对不可约有界对称域的研究具有根本的意义.

用不可约的非紧型 Hermite 对称空间的记号来记对应的有界对称域 $D=G/K\subset C^n$，它们对应的典型域记号称为华的记号，则有如下的分类表(表 4.1)：

在文献[1]中华罗庚将 R_{I}、R_{II}、R_{III}、R_{IV} 分别称之为第一、二、三、四类典型域. 记 $C^{m\times n}$ 是 m 行 n 列复阵全体组成的复 $m\times n$ 维线性空间. 四类典型域可具体表示如下：

表 4.1　不可约有界对称域分类表

$D=G/K$	$A\,\mathrm{III}(m,n)$	$C\,\mathrm{I}(n)$	$D\,\mathrm{III}(n)$	$BD\,\mathrm{I}(n)$	$E\,\mathrm{III}$	$E\,\mathrm{VII}$
华的记号	$R_{\mathrm{I}}(m,n)$	$R_{\mathrm{II}}(n)$	$R_{\mathrm{III}}(n)$	$R_{\mathrm{IV}}(n)$		
D 的秩 r	$\min(m,n)$	n	$\left[\frac{1}{2}n\right]$	2	2	3

$$R_{\mathrm{I}}(m,n)=\{Z\in C^{m\times n},I_m-Z\overline{Z}'>0\};$$

$$R_{\mathrm{II}}(n)=\{Z\in C^{n\times n},Z'=Z,I_n-Z\overline{Z}>0\};$$

$$R_{\mathrm{III}}(n)=\{Z\in C^{n\times n},Z'=-Z,I_n+Z\overline{Z}>0\};$$

$$R_{\mathrm{IV}}(n)=\{z\in C^n,1+|zz'|^2-2z\overline{z}'>0\}.$$

在上面四个表达式中，Z'表示矩阵 Z 的转置矩阵，I_m 表示 $m\times m$ 的单位阵，z 是 C^n 中的行向量，$A>0$ 表示方阵 A 是正定的.

四类典型域 R_{I}、R_{II}、R_{III}、R_{IV} 与它们所对应的(4.2)式的域 $D=G/K$ 的关系如下：R_{I}、R_{II}、R_{III} 是对应的 $D=G/K$ 先作一个线性变换，再表示成矩阵的形式，而 R_{IV} 则是对应的 $D=G/K$ 作一线性变换而得到的.

§ 4.2 有界对称域的 Bergman 核

由 4.1.3 小节的(4.20)式，当 $D=G/K\subset C^n$ 时，$K(z,\overline{w})$ 由全纯自同构 ϕ_z 的 Jacobi 行列式完全定出，其中 ϕ_z 适合 $\phi_z(z)=0$. 这就要求 $g\in G$ 是 ϕ_g 的 Jacobi 矩阵. 由(4.6)和(4.7)式对每个 $g\in G$，g 必有分解：

$$g=k_1ak_2,\ a\in A,\ k_1、k_2\in K.$$

从而可得

$$J_{\phi_g}(w)=J_{\phi_{k_1}}(ak_2\cdot w)J_{\phi_a}(k_2\cdot w)J_{\phi_{k_1}}(w).$$

但由(4.3)和(4.4)式易见

$$J_{\phi_k}=\pi(k),\ k\in K.$$

再由(4.18)和(4.20)式，只须对 $a\in A$，$w\in D$ 求出复的 Jacobi 矩阵 $J_{\phi_a}(w)$，$K(z,\overline{w})$ 就可完全确定了. 因此要求出 $K(z,\overline{w})$，就要求出全纯自同构的复 Jacobi 矩阵，我们先用李群李代数的方法求出全纯自同构的实 Jacobi 矩阵.

4.2.1 全纯自同构的实 Jacobi 矩阵的计算

将 C^n 看作 R^{2n}，即定义映射

$$F:C^n\to R^{2n},$$

$$z = x + \mathrm{i}y \in C^n \to F(z) = (x, y) \in R^{2n},$$

其中 $x, y \in R^n$，则 C^n 中的 D、π、ϕ_g、J_{ϕ_g}、ξ_0 就对应地变成了 R^{2n} 中的 D_F、π_F、ϕ_g^F、$J_{\phi_g}^F$、ξ_F. 特别地，当 $x \in R^n \subset C^n$ 时，$F(x)$ 仍然简记为 x，则易见有

$$|\det J_{\phi_g}^F(F(z))| = |\det J_{\phi_g}(z)|^2.$$

这就意味着可以用实 Jacobi 矩阵 $J_{\phi_g}^F$ 的计算来部分地代替复 Jacobi 矩阵 $J_{\phi_g}(z)$ 的计算.

考虑(4.3)式中的 $\mathfrak{a}$ 在 $\mathfrak{g}$ 上的伴随表示，当 $D=G/K\subset C^n$，D 的秩为 r 时，$\mathfrak{a}$ 在 $\mathfrak{g}$ 上的伴随表示的限制正根(包括重数)的集记为

$$\Sigma^+ = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_l,\ l = 2n - r\}, \tag{4.22}$$

其中 Σ^+ 中与某个限制正根 α 相等的 α_j 出现的次数等于根 α 的重数.

由 Iwasawa 分解，在 $\mathfrak{n}$ 中取一组适当的等长正交基 $\{Y_{\alpha_j}, \alpha_j \in \Sigma^+\}$，其中 Y_{α_j} 是限制正根 α_j 的根向量，θ 是 $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 对合自同构. 置

$$Y_{-\alpha_j} = -\theta(Y_{\alpha_j}), \alpha_j \in \Sigma^+. \tag{4.23}$$

则(4.4)式中的 $\mathfrak{p}$ 的一组等长正交基就可取为

$$\{X_1, X_2, \cdots, X_r, Y_{\alpha_j} + Y_{-\alpha_j}, \alpha_j \in \Sigma^+\}. \tag{4.24}$$

再记 $\mathfrak{m}_0$ 为 $\mathfrak{a}$ 在 $\mathfrak{k}$ 中的中心，即

$$\mathfrak{m}_0 = \{X \in \mathfrak{k}, adH(X) = 0, H \in \mathfrak{a}\},$$

则 $\mathfrak{m}_0$ 的一组适当的等长正交基与

$$\{Y_{\alpha_j} - Y_{-\alpha_j}, \alpha_j \in \Sigma^+\} \tag{4.25}$$

就合并成 $\mathfrak{k}$ 的一组等长正交基.

现在设 $a_1 \in G$，并记

$$\begin{cases} z = \xi_0(ka \cdot o), \\ w = \phi_{a_1}(z) = \xi_0(a_1 ka \cdot o), \\ u = F(z),\ v = F(w), \\ a_1 ka = k_1 a_2 k_2,\ k、k_1、k_2 \in K, \\ a、a_2 \in A. \end{cases} \tag{4.26}$$

再设

$$\begin{cases} a(x) = a\exp X,\ \xi_0(a\cdot o) = \lambda, \\ \qquad \xi_0(a(x)\cdot o) = \lambda(x), \\ a_2(y) = a_2\exp Y,\ \xi_0(a_2\cdot o) = \eta, \\ \qquad \xi_0(a_2(y)\cdot o) = \eta(y), \\ k(t) = k\exp T,\ k_1(s) = k_1\exp R, \end{cases} \tag{4.27}$$

其中

$$\begin{cases} X = x_1X_1 + \cdots + x_rX_r,\ Y = y_1X_1 + \cdots + y_rX_r, \\ T = \sum_{j=1}^{l} t_j(Y_{\alpha_j} - Y_{-\alpha_j}),\ R = \sum_{j=1}^{l} s_j(Y_{\alpha_j} - Y_{-\alpha_j}), \\ x = (x_1, x_2, \cdots, x_r),\ y = (y_1, y_2, \cdots, y_r), \\ t = (t_1, t_2, \cdots, t_l),\ s = (s_1, s_2, \cdots, s_l). \end{cases} \tag{4.28}$$

则(x,t)和(y,s)分别给出了 $F(z)$点和 $F(w)$点的局部坐标系. 再设

$$\begin{cases} u(x,t) = \xi_F(k(t)a(x)\cdot o) = \lambda(x)\pi_F(k(t))', \\ v(y,s) = \xi_F(a_1k(t)a(x)\cdot o) \\ \qquad = \xi_F(k_1(s)a_2(y)k_2(\cdot)\cdot o) \\ \qquad = \xi_F(k_1(s)a_2(y)\cdot o) = \eta(y)\pi_F(k_1(s))', \end{cases} \tag{4.29}$$

这里用 A'表示矩阵 A 的转置矩阵,则 ϕ_{a_1}在 z 点的实 Jacobi 矩阵即 $J^F_{\phi_{a_1}}(F(z))$就是矩阵$(\partial v/\partial u)$,它可由(4.29)式在$(x,t)=0$ 从而$(y,s)=0$ 点相应的 Jacobi 矩阵

$$\left[\frac{\partial u}{\partial(x,t)}\right]、\left[\frac{\partial v}{\partial(y,s)}\right]、\left[\frac{\partial(y,s)}{\partial(x,t)}\right]$$

表示为

$$\begin{aligned} J^F_{\phi_{a_1}}(F(z)) &= \left[\frac{\partial v}{\partial u}\right] \\ &= \left[\frac{\partial v}{\partial(y,s)}\right]\left[\frac{\partial(y,s)}{\partial(x,t)}\right]\left[\frac{\partial u}{\partial(x,t)}\right]^{-1}. \end{aligned} \tag{4.30}$$

由 Harish-Chandra 实现的实形式 ξ_F,可以诱导出 $\mathfrak{p}$ 到 R^{2n}上

的线性同构 $T:\mathfrak{p}\to R^{2n}$，它是 ξ_F 在 o 点的切映射，定义如下：

$$\begin{cases} T(X)=T(x_1X_1+\cdots+x_rX_r) \\ \qquad =(x_1,x_2,\cdots,x_r,0,\cdots,0)\in R^{2n}, \\ T(\mathrm{Ad}k(X))=T(X)\pi_F(k)^t,\ X\in\mathfrak{a},k\in K. \end{cases} \tag{4.31}$$

由此又可导出

$$T(\mathrm{ad}Y(X))=T(X)\dot{\pi}_F(Y)^t,\ X\in\mathfrak{a},\ Y\in\mathfrak{k}. \tag{4.32}$$

由上面各式和双曲正切函数的性质可得：

$$\frac{\partial u}{\partial x_j}=(1-\lambda_j^2)e_j\pi_F(k)^t,\ j=1,2,\cdots,r;$$

$$\frac{\partial u}{\partial t_j}=\lambda\dot{\pi}_F(Y_{\alpha_j}-Y_{-\alpha_j})^t\pi_F(k)^t$$
$$=-\alpha_j(\lambda)T(Y_{\alpha_j}+Y_{-\alpha_j})\pi_F(k)^t,\ j=1,2,\cdots,l,$$

其中 e_j 是 R^{2n} 中第 j 个单位向量，$\dot{\pi}_F$ 是 π_F 的微分，

$$\alpha_j(\lambda)=\alpha_j(\lambda_1X_1+\lambda_2X_2+\cdots+\lambda_rX_r),\ j=1,2,\cdots,l. \tag{4.33}$$

注意到前面定义的映射 T 具有两个性质：(a) 保持正交关系不变；(b) 保持等长关系不变. 这就得到：

$$\left[\frac{\partial u}{\partial(x,t)}\right]=\pi_F(k)\begin{bmatrix} I_r-\lambda^2 & 0 \\ 0 & A(\lambda)\end{bmatrix}, \tag{4.34}$$

其中 I_r 表示 $r\times r$ 的单位阵：

$$\lambda^2=\mathrm{diag}(\lambda_1^2,\lambda_2^2,\cdots,\lambda_r^2),$$
$$\lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_r,0,\cdots,0);$$
$$\det A(\lambda)=C_0\prod_{j=1}^{l}\alpha_j(\lambda),\ C_0\neq 0.$$

同理可得

$$\left[\frac{\partial v}{\partial(y,s)}\right]=\pi_F(k_1)\begin{bmatrix} I_r-\eta^2 & 0 \\ 0 & A(\eta)\end{bmatrix}, \tag{4.35}$$

再来计算 Jacobi 矩阵 $\left[\frac{\partial(y,s)}{\partial(x,t)}\right]$. 这时不妨设 G 是矩阵李群，否则，用 AdG 代替 G 即可，且可假设 $a\in A$ 是实对称阵，$k\in K$ 是

实正交阵，将它们的李代数看作矩阵李代数，则有

$$a_1 k a^2 k^t a_1^t = k_1 a_2^2 k_1^t.$$

将上式看作 G/K 上的函数的矩阵等式来求微分，并记

$$\delta(k) = k^{-1}\mathrm{d}k,\ \delta(a) = a^{-1}\mathrm{d}a,$$

就可得到

$$\begin{aligned} & a^{-1}\delta(k)a + 2\delta(a) + a\delta(k)^t a^{-1} \\ & = k_2^{-1}(a_2^{-1}\delta(k_1)a_2 + 2\delta(a_2) \\ & \quad + a_2\delta(k_1)^t a_2^{-1})k_2, \end{aligned} \tag{4.36}$$

其中 $\delta(k)$、$\delta(k_1)$、$\delta(a)$、$\delta(a_2)$都是左不变 1-形式的阵，又因为 $\delta(k)^t=-\delta(k)$以及当 $Z\in \mathfrak{m}_0$ 时 $\mathrm{Ad}a(Z)=Z$，所以(4.36)式的等式左端的和仅含 $\mathrm{d}x_i$ 和 $\mathrm{d}t_j$，等式右端的和仅含 $\mathrm{d}y_i$ 和 $\mathrm{d}s_j$，$i=1,2,\cdots,r$；$j=1,2,\cdots,l$.

用(4.24)和(4.25)式中的基来表示(4.36)式中的左不变1-形式的阵，则有

$$\delta(k) = \sum_{j=1}^{l}\mathrm{d}t_j(Y_{\alpha_j} - Y_{-\alpha_j}) + \delta(k_0),$$

$$\delta(a) = \sum_{j=1}^{r}\mathrm{d}x_j X_j,$$

$$\delta(k_1) = \sum_{j=1}^{l}\mathrm{d}s_j(Y_{\alpha_j} - Y_{-\alpha_j}) + \delta(k_{1,0}),$$

$$\delta(a_2) = \sum_{j=1}^{r}\mathrm{d}y_j X_j,$$

其中 $\delta(k_0)$和 $\delta(k_{1,0})$都是在 $\mathrm{Ad}a$ ($a\in A$)之下不动的左不变 1-形式. 当 $a=\exp X\in A$ 时，有

$$\mathrm{Ad}a^{-1}(Y_{\alpha_j}) = a^{-1}Y_{\alpha_j}a = \mathrm{e}^{-\alpha_j(X)}Y_{\alpha_j},$$

$$\mathrm{Ad}a^{-1}(Y_{-\alpha_j}) = a^{-1}Y_{-\alpha_j}a = \mathrm{e}^{\alpha_j(X)}Y_{-\alpha_j},$$

用上面各式具体计算(4.36)式就得到

$$\begin{aligned} & a^{-1}\delta(k)a + 2\delta(a) + a\delta(k)^t a^{-1} \\ & = 2\Big\{\sum_{j=1}^{l}\frac{1}{2}\mathrm{d}t_j(\mathrm{e}^{-\alpha_j(X)} - \mathrm{e}^{\alpha_j(X)}) \end{aligned}$$

$$\times\left(Y_{\alpha_j}+Y_{-\alpha_j}\right)+\sum_{j=1}^{r}\mathrm{d}x_jX_j\Big\}$$

$$=k_2^{-1}\{a_2^{-1}\delta(k_2)a_2+2\delta(a_2)+a_2\delta(k_2)^t a_2^{-1}\}k_2$$

$$=2k_2^{-1}\Big\{\sum_{j=1}^{l}\frac{1}{2}\mathrm{d}s_j(\mathrm{e}^{-\alpha_j(Y)}-\mathrm{e}^{\alpha_j(Y)})\left(Y_{\alpha_j}+Y_{-\alpha_j}\right)$$

$$+\sum_{j=1}^{r}\mathrm{d}y_jX_j\Big\}k_2,\tag{4.37}$$

当 $\lambda=\xi_0(a\cdot o)=\xi_0(\exp X\cdot o)$，$X\in\mathfrak{a}$ 时，记

$$C(\lambda)=\mathrm{diag}\Big(\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{-\alpha_1(X)}-\mathrm{e}^{\alpha_1(X)}),\cdots,$$

$$\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{-\alpha_l(X)}-\mathrm{e}^{\alpha_l(X)})\Big),\tag{4.38}$$

则在(4.24)式的等长正交基之下求(4.37)式的Jacobi矩阵就得到

$$\left[\frac{\partial(y,s)}{\partial(x,t)}\right]=\begin{bmatrix}I_r&0\\0&C(\eta)\end{bmatrix}^{-1}\pi_F(k_2)\begin{bmatrix}I_r&0\\0&C(\lambda)\end{bmatrix},\tag{4.39}$$

再记

$$B(\lambda)=\begin{bmatrix}I_r-\lambda^2&0\\0&A(\lambda)C(\lambda)^{-1}\end{bmatrix},\tag{4.40}$$

则由(4.30)及其以后各式就得到

$$J_{\varphi_{a_1}}^{F}(F(z))=\pi_F(k_1)B(\eta)\pi_F(k_2)B(\lambda)^{-1}\pi_F(k)^{-1}.\tag{4.41}$$

求(4.41)式的行列式就得到如下定理：

定理4.1　设 $D=G/K\subset C^n$，D 的秩为 r，ϕ_g 是 $g\in G$ 产生的 D 的全纯自同构．又设

$$z=\lambda\pi(k)^t,\ w=\phi_g(z)=\eta\pi(k_1)^t$$

为 z、$w\in D$ 在(4.1)式下的表示，则有

$$|\det J_{\phi_g}(z)|^2=\prod_{p=1}^{r}\left(\frac{1-\eta_p^2}{1-\lambda_p^2}\right)^{b_p},$$

其中 $J_{\phi_g}(z)$ 是 ϕ_g 在 z 点的复Jacobi矩阵，而 b_p 则可用(4.23)式中

的 $\alpha_j(j=1,2,\cdots,l;l=2n-r)$和(4.24)式中的 $X_i(i=1,2,\cdots,r)$表示成

$$b_p = 1 + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{l}|\alpha_j(X_p)|.$$

证明 由(4.22)式和(4.41)式及与之相关的中间各式可得

$$|\det J_{\phi_g}(z)|^2 = \prod_{j=1}^{r}\frac{1-\eta_j^2}{1-\lambda_j^2}\prod_{j=1}^{l}\frac{2\alpha_j(\eta)(e^{\alpha_j(X)}-e^{-\alpha_j(X)})}{(e^{\alpha_j(Y)}-e^{-\alpha_j(Y)})2\alpha_j(\lambda)},$$

其中 $z=\xi_0(ka\cdot o)\in D$, $a=\exp X$, $X\in\mathfrak{a}$, $\lambda=\xi(a\cdot o)$, X 和 λ 的关系适合(4.11)式, $w=\phi_g(z)=\xi_0(k_1a_2\cdot o)$, $a_2=\exp Y$, $Y\in\mathfrak{a}$, $\xi_0(a_2\cdot o)=\eta$, Y 与 η 的关系同样适合(4.11)式.

由不可约 Hermite 对称空间的理论,记 $\mathfrak{a}^*$ 为 $\mathfrak{a}$ 的对偶空间, $\{X_1,\cdots,X_r\}$为(4.10)式给出的 $\mathfrak{a}$ 的基, $\{\lambda_1,\cdots,\lambda_r\}$为它的对偶基,则不可约 Hermite 对称空间的限制根系必为下面两种情形之一:

$$\begin{cases}(\text{i})\ \Sigma=\{\pm\lambda_i\pm\lambda_j,1\leqslant i<j\leqslant r,\\ \qquad\pm2\lambda_i,1\leqslant i\leqslant r\};\\ (\text{ii})\ \Sigma=\{\pm\lambda_i\pm\lambda_j,1\leqslant i<j\leqslant r,\\ \qquad\pm\lambda_i,\pm2\lambda_i,1\leqslant i\leqslant r\}.\end{cases}\tag{4.42}$$

所以对于

$$X = x_1X_1 + x_2X_2 + \cdots + x_rX_r \in \mathfrak{a},$$

由(4.23)表示的限制正根必适合

$$\alpha_j(X) = x_p \pm x_q,\ 1\leqslant p<q\leqslant r,\ x_p \text{ 或 } 2x_p, 1\leqslant p\leqslant r.$$

这也就等价于

$$\alpha_j(X_p) = 0,\ \pm 1, 2; j = 1,2,\cdots,2n-r.$$

这就容易验证

$$\frac{e^{\alpha_j(X)}-e^{-\alpha_j(X)}}{2\alpha_j(\lambda)} = \prod_{p=1}^{r}\left(\frac{1}{1-\lambda_p^2}\right)^{\frac{1}{2}|\alpha_j(X_p)|},$$

其中 $\alpha_j(\lambda)$由(4.33)式和(4.11)式定义.将上式代入本定理证明的第一个等式中,就证明了本定理. ▌

4.2.2 有界对称域的 Bergman 核函数的计算

有了上一小节的定理 4.1,就可对有界对称域的 Bergman 核

函数作进一步的讨论.

设 $D=G/K\subset C^n$，$\xi_0:G/K\to D\subset C^n$

是 G/K 实现为 D 的 Harish-Chandra 的标准实现. 又设 D' 也是 G/K 的有界实现，$\xi:G/K\to D'\subset C^n$ 是这一有界实现，这时记为 $D'\approx G/K\subset C^n$. $K(z,\overline{w})$ 和 $K'(\eta,\overline{\theta})$ 分别是 D 和 D' 的 Bergman 核函数，则可由(4.15)式得到

$$\begin{cases} K'(\eta,\overline{\theta}) = K(\xi_0\xi^{-1}(\eta),\overline{\xi_0\xi^{-1}(\theta)}) \\ \qquad\qquad \times \det J_{\xi_0\xi^{-1}}(\eta)\,\overline{\det J_{\xi_0\xi^{-1}}(\theta)}, \\ K(z,\overline{w}) = K'(\xi\xi_0^{-1}(z),\overline{\xi\xi_0^{-1}(w)}) \\ \qquad\qquad \times \det J_{\xi\xi_0^{-1}}(z)\,\overline{\det J_{\xi\xi_0^{-1}}(w)}. \end{cases} \tag{4.43}$$

特别当 $\phi=\xi\circ\xi_0^{-1}:D\to D'$ 是线性变换时，(4.43)式就可进一步化简为

$$\begin{cases} K'(\eta,\overline{\theta}) = K(\phi^{-1}(\eta),\overline{\phi^{-1}(\theta)}), \\ K(z,\overline{w}) = K'(\phi(z),\overline{\phi(w)}). \end{cases} \tag{4.44}$$

一般地，若 $D=G/K\subset C^n$，则 D 可分解成不可约的有界对称域的直积如下：

$$D = D_1\times D_2\times\cdots\times D_p, \tag{4.45}$$

其中 $D_j=G_j/K_j\subset C^{n_j}$ 是不可约的有界对称域，$n=n_1+n_2+\cdots+n_p$，记 $K_j(z(j),\overline{w(j)})$ 是 D_j 的 Bergman 核函数

$$\begin{aligned} &z = (z(1),z(2),\cdots,z(p)),\\ &z\in D, z(j)\in D_j,\ j=1,\cdots,p, \end{aligned} \tag{4.46}$$

则有

$$\begin{aligned} &K(z,\overline{w})\\ &\quad = K_1(z(1),\overline{w}(1))K_2(z(2),\overline{w}(2))\cdots K_p(z(p),\overline{w(p)}). \end{aligned} \tag{4.47}$$

上面各式表明了，只须对 $D=G/K\subset C^n$ 或者它的一个线性变换求出 Bergman 核函数，对于一般的 $D\approx G/K\subset C^n$，它的

Bergman 核函数就可原则上定出来. 特别是,只要求出不可约的有界对称域的 Bergman 核函数,则任意的有界对称域的 Bergman 核函数就可原则上定出来.

先讨论 $K(z,\bar{z})$,有如下定理:

定理 4.2 设 $D=G/K\subset C^n$,D 的秩为 r,其余记号与定理 4.1 相同,$K(z,\overline{w})$ 是 D 的 Bergman 核函数,则有

$$\frac{K(z,\bar{z})}{K(0,0)}=\prod_{p=1}^{r}(1-\lambda_p^2)^{-b_p}.$$

证明 由(4.20)式,在定理 4.1 中取 $\phi_z=\psi_z$, 其中 ψ_z 适合 $\psi_z(z)=0, z\in D$. 则定理 4.1 中的 $\eta=0$,即 $\eta_1=\cdots=\eta_r=0$. 由此即得到定理. ▌

定理 4.3 设 $D=G/K\subset C^n$ 并且 D 不可约, D 的秩为 r, $K(z,\overline{w})$ 是 D 的 Bergman 核函数,其余记号同定理 4.1,则有

(1) $|\det J_{\phi_z}(z)|^2=\prod_{p=1}^{r}\left(\frac{1-\eta_p^2}{1-\lambda_p^2}\right)^b$;

(2) $\frac{K(z,\bar{z})}{K(0,0)}=\prod_{p=1}^{r}(1-\lambda_p^2)^{-b}$,

其中 b 的值按照 4.1.4 小节分类表 4.1 中的 A Ⅲ (m,n)、C Ⅰ (n)、D Ⅲ (n)、BD Ⅰ (n)、E Ⅲ 、E Ⅶ 型域的顺序,分别等于

$$b=m+n;n+1;2(n-1);n;12;18.$$

证明 当 D 不可约时,$D=G/K\subset C^n$ 的 Weyl 群 W 对限制根系中根的作用是根的一个置换;又 W 在 $\mathfrak{a}$ 上的作用含有将 $\mathfrak{a}$ 的基 $\{X_1,\cdots,X_r\}$ 看作 r 个文字时,r 个文字的置换群作为子群,这就表明了 $b_p=b, p=1,2,\cdots,r$,彼此相等. 特别是可用

$$b=1+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{l}|\alpha_j(X_1)|\quad(l=2n-r)$$

来求出 b. 而由(4.42)式、(4.43)式及限制素根系的 Dynkin 图,就可具体算出定理中的 b. 再由(4.20)式和定理 4.1 及定理 4.2,就证明了本定理. ▌

应用定理 4.3、(4.20)式及表示理论,以下给出四类典型域的 Bergman 核函数 $K(z,\overline{w})$(见文献[1]).

定理 4.4　四类典型域的 Bergman 核函数如下：

$$R_{\mathrm{I}}(m,n):\frac{K(Z,\overline{W})}{K(0,0)}=\det(I-Z\overline{W}')^{-m-n},$$

$$R_{\mathrm{II}}(n):\frac{K(Z,\overline{W})}{K(0,0)}=\det(I-Z\overline{W})^{-n-1},$$

$$R_{\mathrm{III}}(n):\frac{K(Z,\overline{W})}{K(0,0)}=\det(I+Z\overline{W})^{-n+1},$$

$$R_{\mathrm{IV}}(n):\frac{K(Z,\overline{W})}{K(0,0)}=(1+zz'\,\overline{ww'}-2z\overline{w}')^{-n}.$$

证明　任意 $P\in R_{\mathrm{I}}(m,n)$，由参考文献[1]中可知，$R_{\mathrm{I}}(m,n)$ 上的适合 $\psi_P(P)=0$ 的全纯自同构 ψ_P 可以取为

$$W=Q(Z-P)(I-\overline{P}'Z)^{-1}R^{-1}, \tag{4.48}$$

其中 Q 和 R 是正定的 Hermite 阵，适合

$$Q(I_m-P\overline{P}')Q=Q^2(I_m-P\overline{P}')=I_m,$$
$$R(I_n-\overline{P}'P)R=R^2(I_n-\overline{P}'P)=I_n.$$

对(4.48)式微分，得

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}W&=Q[\mathrm{d}Z(I-\overline{P}'Z)^{-1}+(Z-P)\mathrm{d}(I-\overline{P}'Z)^{-1}]R^{-1}\\
&=Q[I+(Z-P)(I-\overline{P}'Z)^{-1}\overline{P}']\\
&\quad\times \mathrm{d}Z(I-\overline{P}'Z)^{-1}R^{-1}\\
&=Q[I+(Z-P)\overline{P}'(I-Z\overline{P}')^{-1}]\\
&\quad\times \mathrm{d}Z(I-\overline{P}'Z)^{-1}R^{-1}\\
&=Q(I-P\overline{P}')(I-Z\overline{P}')^{-1}\\
&\quad\times \mathrm{d}Z(I-\overline{P}'Z)^{-1}R^{-1}.
\end{aligned}$$

由上式立即可得到 ψ_P 在 $Z\in R_{\mathrm{I}}(m,n)$ 点的复 Jacobi 矩阵为

$$\begin{aligned}
J_{\psi_P}(Z)=&[Q(I-P\overline{P}')(I-Z\overline{P}')^{-1}]\\
&\otimes[(I-\overline{P}'Z)^{-1}R^{-1}]',
\end{aligned}$$

这就可得到

$$\begin{aligned}
\det J_{\psi_P}(P)&=\det Q^n\det R^m\\
&=\det(I-P\overline{P}')^{-\frac{1}{2}(m+n)},
\end{aligned}$$

$$\det J_{\psi_P}(z)=\det Q^{-n}\det R^{-m}\det(I-Z\overline{P}')^{-m-n}.$$

由上面两式和(4.20)式就得到

$$\frac{K(P,\overline{Z})}{K(0,0)} = \det(I - P\overline{Z}')^{-m-n}.$$

为了讨论 $R_{\mathrm{II}}(n)$ 和 $R_{\mathrm{III}}(n)$ 的 Bergman 核函数，将 $C^{n\times n}$ 分解成两个复线性子空间的直和：

$$C^{n\times n} = C_1 \oplus C_2,$$

其中 C_1 和 C_2 分别是

$$C_1 = \{Z \in C^{n\times n}, Z' = Z\},$$

$$C_2 = \{Z \in C^{n\times n}, Z' = -Z\}.$$

再定义 C^{n^2} 到 $C^{n\times n}$ 上的线性同构 $F: C^{n^2} \to C^{n\times n}$，对于 $z=(z_1,z_2,\cdots,z_{n^2})\in C^{n^2}$，有

$$F(z) = Z$$

$$= \begin{bmatrix} z_1 & z_{n+1} & \cdots & z_{n^2+1-n} \\ z_2 & z_{n+2} & \cdots & z_{n^2+2-n} \\ & & \cdots\cdots & \\ z_n & z_{2n} & \cdots & z_{n^2} \end{bmatrix} \in C^{n\times n}.$$

对于 $A\in C^{n\times n}$，$A\otimes A$ 是 C^{n^2} 上的线性变换，且有

$$F(A \otimes A z') = AF(z)A' = AZA'. \tag{4.49}$$

因此若记 C^{n^2} 的直和分解为

$$C^{n^2} = C^{\frac{1}{2}n(n+1)} \oplus C^{\frac{1}{2}n(n-1)},$$

适合

$$C_1 = F\left(C^{\frac{1}{2}n(n+1)}\right),\ C_2 = F\left(C^{\frac{1}{2}n(n-1)}\right),$$

则 $C^{\frac{1}{2}n(n+1)}$ 和 $C^{\frac{1}{2}n(n-1)}$ 是 $A\otimes A, A\in C^{n\times n}$ 的不变子空间，且存在唯一的与 $A\in C^{n\times n}$ 无关的 $n^2\times n^2$ 的正交矩阵 Γ_0，使得

$$\Gamma_0 A \otimes A\Gamma_0^{-1} = \begin{bmatrix} T_1(A) & 0 \\ 0 & T_2(A) \end{bmatrix}, \tag{4.50}$$

其中 $T_1(A)$ 是 $\Gamma_0 A\otimes A\Gamma_0^{-1}$ 在 $C^{\frac{1}{2}n(n+1)}$ 上的限制，而 $T_2(A)$ 则是 $\Gamma_0 A\otimes A\Gamma_0^{-1}$ 在 $C^{\frac{1}{2}n(n-1)}$ 上的限制，且易见 $\det T_1(A)$ 和 $\det T_2(A)$ 均是 $A\in C^{n\times n}$ 上的全纯函数. 特别是当取 $A=U\in U_n$，即 U 是 $n\times n$

的酉方阵时，$T_1(U)$与$T_2(U)$均是酉方阵.

对于$P\in R_1(n)$，由参考文献[1]中可知，存在正定的 Hermite 阵R，适合

$$R^2(I_n-P\overline{P})=R(I_n-P\overline{P})\overline{R}=I_n.$$

$R_1(n)$上适合$\psi_P(P)=0$的全纯自同构ψ_P可取为

$$W=R(Z-P)(I-\overline{P}Z)^{-1}\overline{R}^{-1},$$

同求(4.48)式的微分一样可得

$$\begin{aligned}\mathrm{d}W&=R(I-P\overline{P})(I-Z\overline{P})^{-1}\\&\quad\times\mathrm{d}Z(I-\overline{P}Z)^{-1}\overline{R}^{-1}\\&=R^{-1}(I-Z\overline{P})^{-1}\mathrm{d}Z[R^{-1}(I-Z\overline{P})^{-1}]^{t}.\end{aligned}$$

由(4.49)和(4.50)式可得

$$J_{\psi_p}(Z)=T_1(R^{-1}(I-Z\overline{P})^{-1}).$$

容易验证，当A是对角阵，即

$$A=\mathrm{diag}(a_1,a_2,\cdots,a_n)\equiv\Lambda$$

时，有

$$\det T_1(A)=\det A^{n+1}.$$

而对任意的$A\in C^{n\times n}$，A恒有下面的分解：

$$A=U\Lambda V,\ U、V\in U_n,$$
$$\Lambda=\mathrm{diag}(b_1,\cdots,b_n)$$

使得$\det A=\det\Lambda$. 从而有

$$T_1(A)=T_1(U)T_1(\Lambda)T_1(V).$$

这就得到了对$A\in C^{n\times n}$，有

$$\det T_1(A)=\det A^{n+1}\cdot F(A),$$

适合$|F(A)|=1$，$F(\Lambda)=1$.

上式中的$\det T_1(A)$与$\det A^{n+1}$均在$A\in C^{n\times n}$上全纯，而$F(A)\neq0$，从而$F(A)$也在$C^{n\times n}$上全纯. 但当$F(A)$在$C^{n\times n}$上有界且$A=\Lambda$时，$F(A)=1$，因此只能是$F(A)\equiv1$，即

$$\det T_1(A)=\det A^{n+1}.$$

由此即得$R_1(n)$的 Bergman 核函数为：

$$\frac{K(P,\overline{Z})}{K(0,0)} = \det(I - P\overline{Z})^{-(n+1)}.$$

由参考文献[1],用上面的方法类似地可得

$$\frac{K(P,\overline{Z})}{K(0,0)} = \det(I + P\overline{Z})^{-(n-1)}$$

为 $R_{\mathrm{III}}(n)$的 Bergman 核函数.

第四类典型域 $R_{\mathrm{IV}}(n)$可表示成

$$R_{\mathrm{IV}}(n) = \left\{z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\left(\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{2}, \frac{\mathrm{i}(\lambda_1 + \lambda_2)}{2}, 0, \cdots, 0\right)\Gamma \in C^n,\right.$$

$$\left.|\lambda_1|、|\lambda_2| < 1, \theta、\lambda_1、\lambda_2 \in R, \Gamma \in SO(n)\right\}, \qquad (4.51)$$

而与之对应的 Harish-Chandra 的标准实现则是

$$D = \{z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(\lambda_1, \lambda_2, 0, \cdots, 0)U_0\Gamma U_0^{-1} \in C^n,$$

$$|\lambda_1|、|\lambda_2| < 1, \theta、\lambda_1、\lambda_2 \in R, \Gamma \in SO(n)\}, \qquad (4.52)$$

其中 $SO(n)$是 n 阶旋转群,

$$U_0 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & U_1 \end{bmatrix},$$

U_1 是一个适当的 $n-2$ 阶酉方阵. 且易见有

$$R_{\mathrm{IV}}(n) = DU_0/\sqrt{2}. \qquad (4.53)$$

为了讨论 $R_{\mathrm{IV}}(n)$的 Bergman 核函数,先作一些一般性的讨论如下:

设 $D=G/K\subset C^n$,且 D 不可约,D 的秩为 r,则(4.2)式中的 π 是 K 在 C^n 上的不可约酉表示. 又设 HP 是 $z=(z_1,\cdots,z_n)\in C^n$ 的多项式全体组成的复线性空间,HP_j 是 z 的 j 次齐次多项式全体组成的有限维复线性空间,则 $HP\subset H^2(D)$,且在 $H^2(D)$中稠密.

K 在 C^n 上的不可约酉表示 π 自然诱导了 K 在 $H^2(D)$上的酉表示 ρ,适合

$$(\rho(k)f)(z) = f(k^{-1}\cdot z),\ f\in H^2(D),\ k\in K. \quad (4.54)$$

且在表示 ρ 之下,HP 可分解成 ρ 的不变子空间的正交直和为:

$$HP = \bigoplus_{j=0}^{\infty} HP_j.$$

记 ρ_j 为 ρ 在 HP_j 上的限制,则 ρ_j 是 K 在 HP_j 上的酉表示.从而将 HP_j 分解成 ρ_j 的不可约的不变子空间的正交直和如下:

$$HP_j = \bigoplus_{i=1}^{n_j} HP_j^i,$$

并记 ρ_j^i 为 ρ_j 在 HP_j^i 上的限制,则 ρ_j^i 为 K 在 HP_j^i 上的不可约酉表示.

取 HP_j^i 的一组标准正交基为

$$\{\varphi_{j,l}^i(z), l = 1,2,\cdots,m_{ij}\},$$

其中每个 $\varphi_{j,l}^i(z)$ 均是表示 ρ_j^i 的权向量,再记

$$Q_j^i(z,\overline{w}) = \sum_{l=1}^{m_{ij}} \varphi_{j,l}^i(z)\overline{\varphi_{j,l}^i(w)},$$

$$Q_j(z,\overline{w}) = \sum_{i=1}^{n_j} Q_j^i(z,\overline{w}),$$

则可得 D 的 Bergman 核函数 $K(z,\overline{w})$ 是

$$K(z,\overline{w}) = \sum_{j=0}^{\infty} Q_j(z,\overline{w});$$

且上面的 $Q_j^i(z,\overline{w})$ 和 $Q_j(z,\overline{w})$ 均适合(4.18)式.

以上的讨论当 $D=G/K\subset C^n$ 可约时也成立.

注意到

$$m_{ij} = \int_D Q_j^i(z,\bar{z})\mathrm{d}V(z) \neq 0$$

及

$$\mathrm{d}V(k\cdot z) = \mathrm{d}V(z),\ k\in K,\ z\in D,$$

$$Q_j^i(k\cdot z,\overline{k\cdot z}) = Q_j^i(z,\bar{z}),\ k\in K,\ z\in D.$$

这表明 $Q_j^i(\lambda,\lambda)$是 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r\in R$ 的非零的 $2j$ 次齐次多项式.

当 D 不可约时,根据定理 4.3,可令

$$R(z,\overline{w}) = (K(z,\overline{w})/K(0,0))^{-1/b}. \tag{4.55}$$

因为 $R(z,\overline{w})$关于 $z\in D$ 全纯，关于 $w\in D$ 共轭全纯，且适合(4.18)式，必有适当的复常数 a_{ij}，使得

$$R(z,\overline{w}) = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{n_j} a_{ij}Q_j^i(z,\overline{w}).$$

而根据定理 4.3 又可得

$$\begin{aligned} R(\lambda,\lambda) &= \prod_{p=1}^{r}(1-\lambda_p^2) \\ &= 1+\sum_{j=1}^{r}(-1)^j P_j(\lambda), \end{aligned} \tag{4.56}$$

其中 $P_j(\lambda)$是 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r$ 的 $2j$ 次齐次多项式. 这表明了 $R(z,\overline{w})$ 是 z 和 $\overline{w}$ 的 $2j$ 次多项式. 它由 r 个 z 和 $\overline{w}$ 的 $2j$ 次齐次多项式 $R_j(z,\overline{w})$确定，即

$$R(z,\overline{w}) = 1+\sum_{j=1}^{r}(-1)^j R_j(z,\overline{w}). \tag{4.57}$$

适合：

(1) $R_j(\lambda,\lambda)=P_j(\lambda)$；

(2) $R_j(k\cdot z,\overline{k\cdot w})=R_j(z,\overline{w})$，$k\in K$，$z$、$w\in D$.

当 $j=1$ 时，易见适合上而两个关系式的 z、w 的 2 次齐次多项式是唯一的，即

$$R_1(z,\overline{w}) = z\overline{w}'. \tag{4.58}$$

而当 $j=2$ 时，通过对 $SO(n)$的不可约酉表示的仔细讨论，可以得到

$$HP_2 = HP_2^1 \oplus HP_2^2,$$

即 $n_2=2$，且可得

$$Q_2^1(\lambda,\lambda) = c_1(\lambda_1^4+\lambda_2^4+\cdots),$$

$$Q_2^2(\lambda,\lambda) = c_2P_2(\lambda),$$

其中 c_1 和 c_2 是仅由 $D=G/K\subset C^n$ 决定的复常数. 这就表明了

$$R_2(z,\overline{w}) = b_2Q_2^2(z,\overline{w}). \tag{4.59}$$

当 D' 仅是 D 的一个线性变换时,(4.58)式与(4.59)式除了系数有所变化外仍然成立.

当 $D=G/K\subset C^n$ 是 BD Ⅰ (n)型域时,具体计算 K 在 HP_2 上的表示 ρ_2 可得到 HP_2^K 是复1维的.这表明了存在唯一的一个 K 不变的 z 的二次齐次多项式 $P_2(z)$,即适合 $P_2(k\cdot z)=P_2(z)$, $k\in K$,$z\in D$,使得

$$R_2(z,\overline{w}) = P_2(z)P_2(\overline{w}).$$

当考虑 D 的线性变换即考虑第四类典型域时,由(4.51)式和(4.56)式易见$P_2(z)=zz'$,这就可得到:

$$R(z,\overline{w}) = 1 + zz'\,\overline{ww'} - 2z\overline{w}'.$$

这就得到了第四类典型域的 Bergman 核函数是

$$\frac{K(z,\overline{w})}{K(0,0)} = (1 + zz'\,\overline{ww'} - 2z\overline{w}')^{-n},$$

其中 z、$w\in R_{\mathrm{N}}(n)$.如果考虑 Harish-Chandra 实现 $BDI(n)$的 Bergman 核,则有

$$\frac{K(z,\overline{w})}{K(0,0)} = \left(1 + \frac{1}{4}zU_0U_0'z'\,\overline{wU_0U_0'w'} - z\overline{w}'\right)^{-n}$$

这就完成了定理的证明.　∎

§4.3　Poisson—华核与 Cauchy 核

设 $D=G/K\subset C^n$, S 是 D 的 Silov 边界, $K(z,\overline{w})$、$P(z,U)$、$H(z,\overline{U})$分别是 D 的 Bergman 核、Poisson—华核和 Cauchy 核.当 D 可约时,D、$z\in D$ 以及 $K(z,\overline{w})$的不可约分解由4.2.2小节中的(4.45)至(4.47)式给出,再记 S_j 是(4.45)式中 D_j 的 Silov 边界,$U(j)\in S_j$,则可得到 S 与 $U\in S$ 的对应的分解:

$$S = S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_p,$$

$$U = (U(1),U(2),\cdots,U(p)) \in S,$$

再记 $P_j(z(j),U(j))$和 $H_j(z(j),\overline{U(j)})$分别是 D_j 的 Poisson—华

核和 Cauchy 核，则可得到 $P(z,U)$ 与 $H(z,\overline{U})$ 的对应分解：

$$\begin{cases} P(z,U) = P_1(z(1),U(1))P_2(z(2),U(2))\cdots \\ \qquad\qquad \times P_p(z(p),U(p)), \\ H(z,\overline{U}) = H_1(z(1),\overline{U(1)})H_2(z(2),\overline{U(2)})\cdots \\ \qquad\qquad \times H_p(z(p),\overline{U(p)}). \end{cases} \tag{4.60}$$

由上述的分解式，只须讨论 $D=G/K\subset C^n$ 不可约时 Bergman 核、Poisson—华核与 Cauchy 核三者间的关系，这由下面定理给出：

定理 4.5 设 $D=G/K\subset C^n$ 且 D 不可约，D 的秩为 r，S 是 D 的 Silov 边界，$K(z,\overline{w})$、$P(z,U)$、$H(z,\overline{U})$ 分别是 D 的 Bergman 核、Poisson—华核与 Cauchy 核，则有下式成立：

$$P(z,U) = \left(\frac{K(z,\overline{U})K(U,\overline{z})}{K(0,0)K(z,\overline{z})}\right)^{c/b},\ z\in D, U\in S,$$

$$H(z,\overline{U}) = \left(\frac{K(z,\overline{U})}{K(0,0)}\right)^{c/b},\ z\in D, U\in S,$$

其中 b 的值由定理 4.3 给出，c 的值按照 $A\mathrm{III}(m,n)$ $(m\leqslant n)$，$C\mathrm{I}(n)$，$D\mathrm{III}(n)$，$BD\mathrm{I}(n)$，$E\mathrm{III}$，$E\mathrm{VII}$ 的顺序分别取为

$$c = n, \frac{1}{2}(n+1), \begin{matrix} n-1\ (\text{若 } n \text{ 为偶数}) \\ n\ (\text{若 } n \text{ 为奇数}) \end{matrix}, \frac{1}{2}n,\ 8,\ 9.$$

证明 由 D 的表达式(4.2)式，特别是取 D 的边界点 I_0 为

$$I_0 = (\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r,0,\cdots,0) \text{ 且 } \lambda_j = 1;\ j=1,2,\cdots,r,$$

则 D 的 Silov 边界可取为

$$S = \{k\cdot I_0 = I_0\pi(k)^t, k\in K\}. \tag{4.61}$$

对应于(4.10)式给出的 $\mathfrak{a}$ 的基，记

$$E = X_1 + X_2 + \cdots + X_r,\ a_h = \exp hE,\ h\in R. \tag{4.62}$$

则由(4.2)式、(4.11)式和(4.12)式可得

$$\lim_{h\to+\infty}\xi_0(ka_h\cdot o) = k\cdot I_0 = I_0\pi(k)^t. \tag{4.63}$$

先证明 $g\in G$ 时 D 的全纯自同构 $\phi_g: D\to D$ 是 S 上的实解析同胚，这就要确定映射 $\phi_g: S\to S$，但是由(4.9)式和(4.12)式，这首先要确定 gka_h 的 Cartan 分解. 置

$$\begin{cases} \mathfrak{g}(E) = \{X \in \mathfrak{g}, adE(X) = 0\}, G(E) = \exp\mathfrak{g}(E); \\ \Sigma_E^+ = \{\alpha_j \in \Sigma^+, \alpha_j(E) > 0\} \equiv \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p\}, \\ \Sigma^+(E) = \Sigma^+ \setminus \Sigma_E^+; \\ \mathfrak{a}^+ = \{H \in \mathfrak{a}, \alpha_j(H) > 0, \alpha_j \in \Sigma^+\}, A_+ = \exp\mathfrak{a}^+, \end{cases} \tag{4.64}$$

其中 $E \in \bar{\mathfrak{a}}^+$，$\Sigma^+$ 由(4.22)式给出且与上面 Σ_E^+ 的表达式相一致，并且 $p < l = 2n - r$.

对应于(4.3)和(4.4)式给出的 $\mathfrak{g}$ 和 G 的 Iwasawa 分解和 Cartan 分解，可得 $\mathfrak{g}(E)$和 $G(E)$的对应分解：

$$\mathfrak{g}(E) = \mathfrak{k}(E) \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}(E),\ G(E) = K(E)AN(E),$$

$$\mathfrak{g}(E) = \mathfrak{k}(E) \oplus \mathfrak{p}(E),\ G(E) = K(E)AK(E),$$

其中

$$\mathfrak{k}(E) = \mathfrak{k} \cap \mathfrak{g}(E),\ \mathfrak{n}(E) = \mathfrak{n} \cap \mathfrak{g}(E),\ \mathfrak{p}(E) = \mathfrak{p} \cap \mathfrak{g}(E),$$

且容易验证

$$K(E) = \exp\mathfrak{k}(E) = K \cap G(E),$$

$$N(E) = \exp\mathfrak{n}(E) = N \cap G(E).$$

再记 $\mathfrak{k}(E)$、$\mathfrak{n}(E)$、$\mathfrak{p}(E)$在 $\mathfrak{k}$、$\mathfrak{n}$、$\mathfrak{p}$ 中的正交补分别是 $\mathfrak{k}_E$，$\mathfrak{n}_E$ 和 $\mathfrak{p}_E$，则它们的基分别由下式给出：

$$\begin{cases} \mathfrak{k}_E = \text{span}\{Y_{\alpha_j} - Y_{-\alpha_j}, \alpha_j \in \Sigma_E^+\}, \\ \mathfrak{n}_E = \text{span}\{Y_{\alpha_j}, \alpha_j \in \Sigma_E^+\} \\ \mathfrak{p}_E = \text{span}\{Y_{\alpha_j} + Y_{-\alpha_j}, \alpha_j \in \Sigma_E^+\}. \end{cases} \tag{4.65}$$

置 K 和 N 的正则子流形 K_E、N_E 为

$$K_E = \exp\mathfrak{k}_E,\ N_E = \exp\mathfrak{n}_E.$$

则由 K 和 N 的连通性及 $K_EK(E)$、$K(E)K_E$、$N_EN(E)$、$N(E)N_E$ 分别是 K 和 N 中既开又闭的子集，可得

$$K = K(E)K_E = K_EK(E),\ N = N(E)N_E = N_EN(E).$$

而由 N 及 $N(E)$的中心都只包含幺元，可得到 N 的上述分解是唯一的. 又设 q 是 $K/K(E)$的幺元的傍系，则由 §1.3 的引理 1.5 对紧致齐性空间成立，从而 $K/K(E)$在 q 点的切空间可等同于 $\mathfrak{k}_E$.

再设 $\Omega\subset\mathfrak{k}_E$ 是切割迹的内部，$\bar{\Omega}$ 是 Ω 添加适当的边界点使得 $\widetilde{K}_E=\exp\bar{\Omega}$ 是 $K/K(E)$ 的等价类代表元的集，由于 $K/K(E)\times K(E)$ 与 K 是微分同胚的，从而可得到

$$K=K(E)\widetilde{K}_E=\widetilde{K}_EK(E)$$

的分解是唯一的，其中若 $K_E\cap K(E)$ 仅含幺元时，$\widetilde{K}_E=K_E$，否则，$\widetilde{K}_E$ 是 K_E 的真子集.

将 $g\in G$ 的 Iwasawa 分解记为

$$g=kan=k(g)\exp H(g)n(g),$$
$$k(g)\in K, H(g)\in\mathfrak{a}, n(g)\in N, \tag{4.66}$$

则 $K(g)$、$n(g)$ 和 $H(g)$ 均是实解析映照. 特别是对于 $g\in G, k\in K$，记 gk 的 Iwasawa 分解为

$$gk=k_1a_0n,\ k_1\in K,\ a_0\in A,\ n\in N. \tag{4.67}$$

对于 G 和 $G(E)$ 的 Cartan 分解，令

$$\mathring{G}=KA_+K, \mathring{G}(E)=\mathring{G}\cap G(E).$$

则 $\mathring{G}$ 和 $\mathring{G}(E)$ 分别是 G 和 $G(E)$ 的稠密开子集，且对于 $g\in\mathring{G}$，g 的 Cartan 分解

$$g=k_1a_2k_2=k_1(g)a_2(g)k_2(g),\ a_2\in A_+,\ k_1,k_2\in K$$

是唯一的，且 $k_1(g)$、$k_2(g)$、$a_2(g)$ 都是定义于 $\mathring{G}$ 上的实解析映照.

而对于 $\mathring{G}(E)$ 的 Cartan 分解的唯一性，则要用到 $\widetilde{A}_+\supset A_+$（这里 $\widetilde{A}_+$ 由 $\Sigma^+(E)$ 定义），这时

$$\mathring{G}(E)=K(E)\widetilde{A}_+K(E)$$

才与 $\mathring{G}$ 的 Cartan 分解具有相同的性质.

对于 $gka_h, h>0$，由(4.67)式，记它的 Iwasawa 分解和 Cartan 分解为

$$gka_h=k_1a_0na_h=k_1(h)a_2(h)k_2(h). \tag{4.68}$$

其中 $gk=k_1a_0n$ 由(4.67)式给出. 又记

$$n=n_1n_2,\ n_1'=a_0n_1a_0^{-1},\ n_2'=a_0n_2a_0^{-1},$$

其中 $n_1\in N(E)$，$n_2\in N_E$，从而有 $n_1'\in N(E)$，$n_2'\in N_E$. 则可将(4.68)式记为

$$gka_h = k_1n_1'n_2'a_0a_h = k_1(h)a_2(h)k_2(h). \qquad (4.68')$$

再将上式中的 $k_1(h)$ 和 $k_2(h)$ 表示成

$$k_1(h) = k_1k(h) = k_1k_E(h)k(E,h),$$

$$k_2(h) = k_2(E,h)k_{2,E}(h),$$

其中

$$k(E,h)、k_2(E,h) \in K(E);\ k_E(h)、k_{2,E}(h) \in \bar{R}_E.$$

则由(4.68′)式，就可将 gka_h 和 $n_1'n_2'$ 表示如下：

$$\begin{cases} gka_h = k_1k_E(h)g(h)r(h)a_0a_h \\ \qquad = k_1k_E(h)g(h)a_0a_hk_{2,E}(h), \\ n_1'n_2' = k_E(h)g(h)r(h), \\ g(h) = k(E,h)a_2(h)a_h^{-1}k_2(E,h)a_0^{-1} \in G(E), \\ r(h) = a_0a_hk_{2,E}(h)a_h^{-1}a_0^{-1}. \end{cases} \qquad (4.69)$$

再记 $g(h)a_0$ 的 Iwasawa 分解与 Cartan 分解以及与之相应的 $n_1'a_0$ 的 Cartan 分解是

$$\begin{cases} g(h)a_0 = k_3(h)a_3(h)n_1(h) \\ \qquad = k_3(h)n_1'(h)a_3(h) \\ \qquad = k(E,h)a_2(h)a_h^{-1}k_2(E,h), \\ n_1'a_0 = k_4a_4k_5, \end{cases} \qquad (4.70)$$

其中 $k_3(h)$，k_4、$k_5 \in K(E)$；$n_1(h)$、$n_1'(h) \in N(E)$；$a_4 \in \bar{A}_+$ 的闭包在 h 足够大时 $a_4(h)$ 在 a_4 的一个邻域内，同时有 $n_1'(h) = a_3(h)n_1(h) \times a_3(h)^{-1}$，$k_3(h)$、$n_1'(h)$、$a_3(h)$ 是 h 的实解析映照.

由(4.65)式，记

$$k_{2,E}(h) = \exp\left\{\sum_{j=1}^{p} b_j(h)(Y_{\alpha_j} - Y_{-\alpha_j})\right\},$$

其中 $b_j(h)$ $(j=1,2,\cdots,p)$ 在 $h \in (0,+\infty)$ 上有界，再由(4.66)式中 $H(g)$ 的定义，置

$$Y = Y(h) = H(a_0a_h) = hE + H(a_0),$$

则(4.69)式中的 $r(h)$ 可表示成

$$r(h) = \exp\left\{\sum_{j=1}^{p} b_j(h)\left(e^{\alpha_j(Y)}Y_{\alpha_j} - e^{-\alpha_j(Y)}Y_{-\alpha_j}\right)\right\}. \qquad (4.71)$$

记 $\mathrm{d}(x,y)$ 为 G 中元 x 和 y 间的黎曼距离，d_0 为 K 的直径，e 为 G 的幺元. 由(4.69)式的第二式有

$$\mathrm{d}(g(h)r(h),e)\leqslant \mathrm{d}(n_1'n_2',e)+d_0.$$

而由(4.69)式的第一式和(4.70)式的第一式又有

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(k_2(E,h)^{-1}k(E,h)^{-1}g(h)a_h,e)&\leqslant \mathrm{d}(gka_h,e)+2d_0+\mathrm{d}(a_0,e)\\&\leqslant \mathrm{d}(g,e)+\mathrm{d}(a_h,e)+\mathrm{d}(a_0,e)+3d_0.\end{aligned}$$

而由(4.70)的第二式及 a_h 与 $K(E)$ 的交换性可得

$$\begin{aligned}&\mathrm{d}(k_2(E,h)^{-1}k(E,h)^{-1}g(h)a_h,e)\\&\quad=\mathrm{d}(k_2(E,h)^{-1}k(E,h)^{-1}g(h),e)+\mathrm{d}(a_h,e).\end{aligned}$$

这就得到

$$\begin{aligned}&\mathrm{d}(k_2(E,h)^{-1}k(E,h)^{-1}g(h),e)\\&\quad\leqslant \mathrm{d}(g,e)+\mathrm{d}(a_0,e)+3d_0.\end{aligned}\tag{4.72}$$

由此又可得

$$\mathrm{d}(g(h),e)\leqslant \mathrm{d}(g,e)+\mathrm{d}(a_0,e)+4d_0.\tag{4.73}$$

又因为

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(r(h),e)&\leqslant \mathrm{d}(g(h)r(h),e)+\mathrm{d}(g(h),e)\\&\leqslant \mathrm{d}(g,e)+\mathrm{d}(a_0,e)\\&\quad+\mathrm{d}(n_1'n_2',e)+5d_0,\end{aligned}\tag{4.74}$$

这就表明 G 的下面三个子集

$$\{k_E(h),h>0\}、\{g(h),h>0\}\ 和\ \{r(h),h>0\}$$

均是 G 中的有界集，且它们的极限点的集分别是 $\widetilde{K}_E$ 闭包、$G(E)$ 和 N_E 中的有界集. 由 G 的分解

$$G=\widetilde{K}_EG(E)N_E$$

的唯一性和 $n_1'n_2'$ 与 h 无关，就必然有

$$\begin{aligned}&k_E(h)\to e,\ g(h)\to n_1',\\&r(h)\to n_2',\ h\to+\infty.\end{aligned}\tag{4.75}$$

由此又有

$$k_{2,E}(h)\to e,\ h\to+\infty.\tag{4.76}$$

再将上述结论应用于(4.70)式，则由 Iwasawa 分解的唯一性与 $g(h)a_0$和 $n_1'a_0$ 的 Cartan 分解在相容意义下的唯一性，可得

$$\begin{cases} k_3(h) \to e, k(E,h) \to k_4, k_2(E,h) \to k_5, h \to +\infty, \\ n_1'(h) \to n_1', a_3(h) \to a_0, a_2(h)a_h^{-1} \to a_4, h \to +\infty, \end{cases} \tag{4.77}$$

由(4.12)、(4.68′)、(4.75)、(4.76)和(4.77)式就可定义映射 $\phi_g: S \to S$ 为

$$\phi_g(k \cdot I_0) = \lim_{t \to +\infty} \xi_0(gka_t \cdot o) = k_1 \cdot I_o, \tag{4.78}$$

其中 g、k 和 k_1 适合(4.67)式.

记 $$M(E) = \{k \in K, k \cdot I_0 = I_0\},$$

则 $M(E) \supset K(E)$，且 $M(E)/K(E)$是一个有限群. 记 $K/M(E)$的幺元傍系为 q，$G/M(E)AN$ 的幺元的傍系为 q_1. 定义映射

$$\psi: K/M(E) \to S,\ k \cdot q \to \psi(k \cdot q) = k \cdot I_0,$$

$$\eta: G/M(E)AN \to S,\ k \cdot q_1 \to \eta(k \cdot q_1) = k \cdot I_0.$$

则 ψ 与 η 均是实解析同胚.

$g \in G$ 在 $G/M(E)AN$ 上的作用

$$g: G/M(E)AN \to G/M(E)AN,\ k \cdot q_1 \to gk \cdot q_1 = k_1 \cdot q_1$$

是 $G/M(E)AN$ 到自身的实解析同胚，其中 g、k 和 k_1 适合(4.67)式. 将上式与(4.78)式相比较，可见映射 $\phi_g: S \to S$ 是实解析的微分同胚.

置 G/K 的子流形 S_h，$h > 0$，为

$$S_h = \{ka_h \cdot o, k \in K\}.$$

由(4.12)式易见 S_h 与 S 是实解析同胚的，这里 a_h 由(4.62)式给出. 由(4.78)式易见当 $h \to +\infty$时，有 $\xi_0(S_h) \to S$. 这就提示了可以应用在 4.2.1 小节中用来证明定理 4.1 至定理 4.3 的方法与记号通过对 $\phi_g: D \to D$ 限制在 $\xi_0(S_h)$上时实 Jacobi 矩阵的计算来求出 ϕ_g 在 S 上作用的实 Jacobi 矩阵.

设 M 是黎曼流形，$T_m(M)$是 M 在 $m \in M$ 点的切空间，EXP_m 是 m 点的指数映射. 取 $T_m(M)$中的一组标准正交基$\{X_1, X_2, \cdots,$

$X_s\}$，$X\in T_m(M)$在这组标准正交基下的坐标表示是

$$X = x_1X_1 + x_2X_2 + \cdots + x_sX_s.$$

由此确定的 M 在 m 点的法坐标系

$$\{EXP_m^{-1}, x = (x_1, \cdots, x_s)\}$$

称为 M 在 m 点的标准的法坐标系. 简称为 x 是 M 在 m 点的法坐标系.

设 $\phi: M\to N$ 是黎曼流形 M 到 N 上的微分同胚，x 和 y 分别是 M 在 m 点和 N 在 $n=\phi(m)$点的法坐标系. ϕ 在上述两个坐标系中就可表示成

$$y = EXP_n^{-1}\circ\phi\circ EXP_m(x), \tag{4.79}$$

或者简记为

$$y = \phi(x). \tag{4.79'}$$

这一映射在 $m\in M$ 点，即 $x=0$ 点的 Jacobi 矩阵记为 $J_\phi(m)$，则(4.79)式的微分就可由 $J_\phi(m)$表示为

$$\mathrm{d}y = \mathrm{d}xJ_\phi(m)' = \mathrm{d}x\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)', \tag{4.80}$$

其中 A'表示矩阵 A 的转置矩阵.

显然，当在 m 和 n 点选取不同的标准法坐标系时，相应于(4.79)式的 Jacobi 矩阵 $J_\phi(m)$是不同的，但是 $J_\phi(m)$行列式的绝对值即$|\det J_\phi(m)|$，与 m 和 n 点的标准的法坐标系的选取无关，它是 ϕ 引起的对应点黎曼体积元的变化率.

应用 4.2.1 小节中的记号，记 $S_F=F(S)$，对于 $a_1\in G$，$\phi_{a_1}: S\to S$，$\phi_{a_1}(k\cdot I_0)=\bar{k}_1\cdot I_0$ 由(4.78)式定义，设 $\bar{u}_\infty$和 $\bar{v}_\infty$分别是 S_F 在 $F(k\cdot I_0)$和 $F(\bar{k}_1\cdot I_0)$点的标准的法坐标系，ϕ_{a_1}关于坐标系 $\bar{u}_\infty$和 $\bar{v}_\infty$的实 Jacobi 矩阵即 $\phi_{a_1}^F$关于坐标系 $\bar{u}_\infty$和 $\bar{v}_\infty$的 Jacobi 矩阵则记为 $J_{a_1}(k\cdot I_0)$. 于是由(4.80)式在 $k\cdot I_0\in S$ 点即 $\bar{u}_\infty=0$ 点有

$$\mathrm{d}\bar{v}_\infty = \mathrm{d}\bar{u}_\infty J_{a_1}(k\cdot I_0)'. \tag{4.81}$$

为了计算 $J_{a_1}(k\cdot I_0)$，考虑如下微分同胚：

$$\phi_{a_1}: \xi_0(S_h) \to \xi_0(a_1\cdot S_h),$$

$$z = \xi_0(ka_h \cdot o) \to w = \phi_{a_1}(z).$$

它们的实形式是

$$\phi_{a_1}^F : \xi_F(S_h) \to \xi_F(a_1 \cdot S_h),$$

$$F(z) = \xi_F(ka_h \cdot o) \to F(w).$$

设 $\bar{u}_h$ 和 $\bar{v}_h$ 分别是 $\xi_F(S_h)$在 $F(z)=\xi_F(ka_h \cdot o)$点和 $\xi_F(a_1 \cdot S_h)$在 $\xi_F(a_1ka_h \cdot o)$点的标准的法坐标系，ϕ_{a_1}关于上述坐标系在 $z=\xi_0(ka_h \cdot o)$点的实 Jacobi 矩阵即上式定义的映射 $\phi_{a_1}^F$在 $F(z)=\xi_F(ka_h \cdot o)$点即 $\bar{u}_h=0$ 点的 Jacobi 矩阵为 $J_{a_1,h}(z)$，由(4.73)式同样有

$$d\bar{v}_h = d\bar{u}_h J_{a_1,h}(z)', \quad z = \xi_0(ka_h \cdot o). \tag{4.82}$$

S_F、$\xi_F(S_h)$和 $\xi_F(a_1 \cdot S_h)$作为 R^{2n}或者 D_F 的实解析的正则子流形，R^{2n}的内积自然地诱导了 S_F、$\xi_F(S_h)$和 $\xi_F(a_1 \cdot S_h)$上的黎曼度量，上面所述的各点的标准的法坐标系都是按照上述诱导的黎曼度量所决定的.

下面应用 4.2.1 小节中的(4.26)至(4.37)式来求出 $J_{a_1}(k \cdot I_0)$. 在(4.26)式中取 $a=a_h$，记 $\overline{T}$ 和 $\overline{R}$ 是(4.28)式中的 T 和 R 在 $\mathfrak{k}_E$ 中的正交投影，并记

$$\bar{t} = (t_1, t_2, \cdots, t_p), \quad \bar{s} = (s_1, s_2, \cdots, s_p).$$

与之对应地，在(4.27)式中记

$$k(\bar{t}) = k\exp\overline{T}, \quad k_1(\bar{s}) = k_1\exp\overline{R}.$$

将(4.29)式限制在 $\xi_F(S_h)$上可得

$$\begin{cases} u_h(0,\bar{t}) = \xi_F(k(\bar{t})a_h \cdot o) = \lambda(h)\pi_F(k(\bar{t}))', \\ v_h(y,s) = \xi_F(a_1k(\bar{t})a_h \cdot o) = \xi_F(k_1(s)a_2(y) \cdot o) \\ \qquad = \eta(y)\pi_F(k_1(s))', \end{cases} \tag{4.29'}$$

其中 y 是 $\bar{s}$ 的函数，s 中的其余坐标 $s_j(p+1 \leqslant j \leqslant l)$也是 $\bar{s}$ 的函数，$\bar{s}$ 是 $\bar{t}$ 的函数.

再在(4.29')中令 $h \to +\infty$，由(4.63)式和(4.78)式得

$$\begin{cases} u_\infty(0,\bar{t}) = \lim\limits_{h\to+\infty} \xi_F(k(\bar{t})a_h \cdot o) \\ \qquad\qquad = I_0\pi_F(k(\bar{t}))', \\ v_\infty(0,s_\infty) = \lim\limits_{h\to+\infty} \xi_F(a_1k(\bar{t})a_h \cdot o) \\ \qquad\qquad = I_0\pi_F(\bar{k}_1(s_\infty))', \end{cases} \tag{4.29''}$$

其中 $a_1k(\bar{t})=\bar{k}_1(s)a_0n$ 是 $a_1k(\bar{t})$的 Iwasawa 分解，s_∞同前面一样是 $\bar{t}$ 的函数组成的向量.

当 $\bar{t}=0$ 时，$s=0$，$y=0$，$u_h(0,0)=\lambda(h)$，$v_h(0,0)=\eta(y)$，$u_\infty(0,0)=I_0$，$v_\infty(0,0)=I_0$. 将(4.29′)和(4.29″)式在 $\bar{t}=0$ 点求微分，并应用(4.31)式可得

$$\begin{cases} \mathrm{d}u_h = \sum\limits_{j=1}^{p}\mathrm{d}t_j[-\alpha_j(\lambda(h))]T(Y_{\alpha_j}+Y_{-\alpha_j})\pi_F(k)', \\ \mathrm{d}v_h = \left(\sum\limits_{i=1}^{r}\mathrm{d}y_i(1-\eta_i^2)\mathrm{e}_i+\sum\limits_{i=1}^{l}\mathrm{d}s_i[-\alpha_i(\eta(h))]T(Y_{\alpha_i}+Y_{-\alpha_i})\right) \\ \qquad \times\pi_F(k_1)' \\ \qquad \equiv \sum\limits_{j=1}^{p}\mathrm{d}s_j[-\alpha_j(\eta(h))](T(Y_{\alpha_j}+Y_{-\alpha_j})+R_j)\pi_F(k_1)', \\ \mathrm{d}u_\infty = \sum\limits_{j=1}^{p}\mathrm{d}t_j[-\alpha_j(I_0)]T(Y_{\alpha_j}+Y_{-\alpha_j})\pi_F(k)', \\ \mathrm{d}v_\infty = \sum\limits_{j=1}^{p}\mathrm{d}\tilde{s}_j[-\alpha_j(I_0)]T(Y_{\alpha_j}+Y_{-\alpha_j})\pi_F(\bar{k}_1)', \end{cases} \tag{4.83}$$

其中 a_h 和 $a_2(h)$的关系由(4.68)式给出：

$$\begin{cases} \lambda(h) = \xi_0(a_h \cdot o) = (\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r,0,\cdots,0), \\ \eta(h) = \xi_0(a_2(h)\cdot o) = (\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_r,0,\cdots,0), \\ R_j = \dfrac{-1}{\alpha_j(\eta(h))}\left\{\sum\limits_{i=1}^{r}\dfrac{\partial y_i}{\partial s_j}(1-\eta_i^2)\mathrm{e}_i \right. \\ \qquad \left. -\sum\limits_{i=p+1}^{l}\dfrac{\partial s_i}{\partial s_j}\alpha_i(\eta(h))T(Y_{\alpha_i}+Y_{-\alpha_i})\right\}. \end{cases} \tag{4.84}$$

记 $\Pi:R^{2n}\to R^p$，$u\to\Pi(u)$为 $R^{2n}\to R^p$ 上的投影算子，它定义为

若 $u=(u_1,u_2,\cdots,u_{2n})\in R^{2n}$，则有

$$\Pi(u)=(u_1,u_2,\cdots,u_p)\in R^p.$$

由 $\{T(Y_{\alpha_j}+Y_{-\alpha_j}),j=1,2,\cdots,p\}$ 是 S_F 在 I_0 点切空间的一组等长正交基，所以存在 R^{2n} 上的一个正交矩阵 Γ_0，使下式成立：

$$T(Y_{\alpha_j}+Y_{-\alpha_j})\Gamma_0=(b_{1j},b_{2j},\cdots,b_{pj},0,\cdots,0),j=1,2,\cdots,p.$$

类似地，对每个 $a_1\in G,k\in K,h>0$，存在 R^{2n} 上的正交矩阵 $\Gamma(a_1,k,h)$，使下式成立：

$$\begin{aligned}&(T(Y_{\alpha_j}+Y_{-\alpha_j})+R_j)\Gamma(a_1,k,h)\\&=(c_{1j},c_{2j},\cdots,c_{pj},\cdots),j=1,\cdots,p.\end{aligned}$$

再令

$$A(\lambda)=-\operatorname{diag}(\alpha_1(\lambda),\cdots,\alpha_p(\lambda))(b_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant p},$$

$$A_h(\lambda)=-\operatorname{diag}(\alpha_1(\lambda),\cdots,\alpha_p(\lambda))(c_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant p}.$$

则对(4.83)式先作正交变换，再作正交投影，可得：

$$\begin{cases}d\bar{u}_h=\Pi(du_h\pi_F(k)\Gamma_0)=d\bar{t}A(\lambda(h)),\\ d\bar{v}_h=\Pi(dv_h\pi_F(k_1)\Gamma_0=d\bar{s}A(\eta(h)),\\ d\bar{u}_\infty=\Pi(du_\infty\pi_F(k)\Gamma_0)=d\bar{t}A(I_0),\\ d\bar{v}_\infty=\Pi(dv_\infty\pi_F(\bar{k}_1)\Gamma_0)=ds_\infty A(I_0).\end{cases}\tag{4.83'}$$

由(4.83′)式就得到

$$\begin{cases}J_{a_1}(k\cdot I_0)=\left(\dfrac{\partial\bar{v}_\infty}{\partial\bar{u}_\infty}\right)=\left(\dfrac{\partial\bar{s}_\infty}{\partial\bar{t}}\right),\\ J_{a_{1,h}}(z)=\left(\dfrac{\partial v_h}{\partial u_h}\right)=\left(\dfrac{\partial\bar{s}}{\partial\bar{t}}\right)A(\lambda(h))A(\eta(h))^{-1}.\end{cases}\tag{4.85}$$

由(4.83)、(4.84)和(4.77)式可得到：当 $h\to+\infty$ 时，$\lambda(h)\to I_0$，$\eta(h)\to I_0$，$A(\lambda(h))\to A(I_0)$，$A_h(\eta(h))\to A(I_0)$. 于是当 $h\to+\infty$ 时，若 $J_{a_{1,h}}(z)$，$z=\xi_0(ka_h\cdot o)$，关于 $k\in K$ 一致收敛时，由分析的已知定理及(4.78)式和(4.85)式就有

$$\det J_{a_1}(k\cdot I_0)=\lim_{h\to\infty}\det\left(\frac{\partial\bar{s}}{\partial\bar{t}}\right).\tag{4.86}$$

设 V 是欧氏空间，V_1 是 V 的线性子空间，$\Pi:V\to V_1$ 是映上的正交投影，T 是 V 上的线性变换，则 $\Pi T\Pi$ 以 V_1 和 V_1 在 V 中的正

交补为不变子空间，这就定义了 T 在 V_1 上的正交投影 $\Pi[T]$ 如下：

$$\Pi[T]:V_1 \to V_1,\ x \in V_1,$$
$$\Pi[T](x) = \Pi T \Pi(x) \in V_1. \tag{4.87}$$

现在记 Π_0 是 $\mathfrak{g}$ 到 $\mathfrak{p}_E$ 上的正交投影，则将(4.37)式投影到 $\mathfrak{p}_E$ 上(见(4.65)式)，其中 $s_i(p+1\leqslant i\leqslant l)$ 是 $\bar{s}$ 的函数，$y_i(1\leqslant i\leqslant r)$ 也是 $\bar{s}$ 的函数，而 $\bar{s}$ 则是 $\bar{t}$ 和 h 的函数，则(4.37)式在 $\mathfrak{p}_E$ 上的投影得到等式：

$$\begin{aligned}&\sum_{j=1}^{p}\mathrm{d}t_j(\mathrm{e}^{-\alpha_j(X)} - \mathrm{e}^{\alpha_j(X)})(Y_{\alpha_j} + Y_{-\alpha_j}) \\ &= \Pi_0\left\{Ad k_2^{-1}\left(\sum_{j=1}^{p}\mathrm{d}s_j\left[(\mathrm{e}^{-\alpha_j(Y)} - \mathrm{e}^{\alpha_j(Y)})\right.\right.\right. \\ &\qquad \left.\left.\left.\times (Y_{\alpha_j} + Y_{-\alpha_j}) + \overline{R}_j\right]\right)\right\},\end{aligned} \tag{4.88}$$

其中 $X = H(a_h) = hE,$

$Y = H(a_2) = H(a_2(h)) = hE + H(a_2(h)a_h^{-1}),$

$$\overline{R}_j = \sum_{i=p+1}^{l}\frac{\partial s_i}{\partial s_j}(\mathrm{e}^{-\alpha_i(Y)} - \mathrm{e}^{\alpha_i(Y)})(Y_{\alpha_i} + Y_{-\alpha_i}) + 2\sum_{i=1}^{r}\frac{\partial y_i}{\partial s_j}X_i.$$

将(4.88)式写成矩阵形式，并应用(4.87)式所定义的记号，则有

$$\begin{aligned}&(Y_{\alpha_1} + Y_{-\alpha_1},\cdots,Y_{\alpha_p} + Y_{-\alpha_p})C(X)(\mathrm{d}t_1,\cdots,\mathrm{d}t_p)' \\ &= (Y_{\alpha_1} + Y_{-\alpha_1},\cdots,Y_{\alpha_p} + Y_{-\alpha_p}) \\ &\qquad \times (\Pi_0[Ad k_2^{-1}]C(Y) + R)(\mathrm{d}s_1,\cdots,\mathrm{d}s_p)',\end{aligned} \tag{4.88'}$$

其中 A' 表示矩阵 A 的转置.

$$C(X) = \mathrm{diag}\left\{(\mathrm{e}^{-\alpha_1(X)} - \mathrm{e}^{\alpha_1(X)}),\cdots,(\mathrm{e}^{-\alpha_p(X)} - \mathrm{e}^{\alpha_p(X)})\right\},$$

$$\Pi_0 Ad k_2^{-1}(\overline{R}_j) = \sum_{i=1}^{p}R_{ij}(Y_{\alpha_i} + Y_{-\alpha_i}),$$

$$R=(R_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant p}.$$

由此可得 Jacobi 矩阵如下：

$$\left(\frac{\partial \bar{s}}{\partial \bar{t}}\right)=(I-C(Y)^{-1}\Pi_0[\mathrm{Ad}k_2^{-1}]^{-1}R)^{-1}$$
$$\times C(Y)^{-1}(\Pi_0[\mathrm{Ad}k_2^{-1}])^{-1}C(X). \qquad (4.89)$$

由 $\overline{R}_j$ 的表达式中的 $\alpha_i\in\Sigma^+(E)$ 即 $\alpha_i(E)=0$，易见 $\overline{R}_j$ 是有界的，从而 R 是有界的矩阵，因此上式右端第一个阵在 $h\to+\infty$ 时趋于单位阵，而由(4.77)式当 $h\to+\infty$ 时，$k_2\to k_5\in K(E)$，因为 P_E 是 $\mathrm{Ad}K(E)$ 的不变子空间，故当 $h\to+\infty$ 时，有 $\det(\Pi_0[\mathrm{Ad}k_2^{-1}])\to1$，$R\to0$ 阵. 这就得到

$$\lim_{h\to+\infty}\det\left(\frac{\partial \bar{s}}{\partial \bar{t}}\right)=\lim_{h\to+\infty}\prod_{j=1}^{p}\frac{e^{\alpha_j(X)}-e^{-\alpha_j(X)}}{e^{\alpha_j(Y)}-e^{-\alpha_j(Y)}}$$
$$=\lim_{h\to+\infty}\prod_{j=1}^{p}\frac{e^{\alpha_j(X)}-e^{-\alpha_j(X)}}{2\alpha_j(\lambda(h))}\cdot\frac{2\alpha_j(\eta(h))}{e^{\alpha_j(Y)}-e^{-\alpha_j(Y)}},$$

其中 $\alpha_j(\lambda)$ 由(4.11)和(4.33)式定义.

由上式和(4.86)式，Poisson—华核的定义及定理 4.3 中计算 b_j 的方法，当 $z_0\in D$ 时，取 $a_1\in G$，适合 $\phi_{a_1}(z_0)=0$，则当 $J_{a_1,h}(z)$，$z=\xi_0(ka_h\cdot o)$ 在 $h\to\infty$ 时，关于 k 一致收敛时，有

$$P(z_0,U)=|\det J_{a_1}(k\cdot I_0)|$$
$$=\lim_{h\to+\infty}|\det J_{a_1,h}(z)|$$
$$=\lim_{h\to+\infty}\det\left(\frac{\partial \bar{s}}{\partial \bar{t}}\right)=\lim_{h\to+\infty}\prod_{j=1}^{r}\left(\frac{1-\eta_j^2}{1-\lambda_j^2}\right)^{c_j}, \quad (4.90)$$

其中 η_j、λ_j 适合(4.84)式，$z=\xi_0(ka_h\cdot o)$，$U=k\cdot I_0$，

$$c_j=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{p}|\alpha_i(X_j)|,\quad j=1,2,\cdots,r. \qquad (4.91)$$

当 $D=G/K\subset C^n$ 不可约时，(4.90)式中的 $c_j=c$，$j=1,2,\cdots,r$，而由定理 4.3 和(4.20)式又有

$$|\det J_{\phi_{a_1}}(z)|^2=\prod_{j=1}^{r}\left(\frac{1-\eta_i^2}{1-\lambda_i^2}\right)^{b},$$

$$K(z_0,\bar{z})=K(0,0)\det J_{\phi_{a_1}}(z_0)\overline{\det J_{\phi_{a_1}}(z)},$$

$$K(z_0,\bar{z}_0)=K(0,0)|\det J_{\phi_{a_1}}(z_0)|^2.$$

将上面三个等式与(4.90)式取 $c_i=c$ 的情形相比较，就可得到当 $D=G/K\subset C^n$ 不可约时，有

$$\begin{aligned}P(z_0,U)&=\lim_{h\to+\infty}\left(\frac{K(z_0,\bar{z})K(z,\bar{z}_0)}{K(0,0)K(z_0,\bar{z}_0)}\right)^{c/b}\\&=\left(\frac{K(z_0,\bar{U})K(U,\bar{z}_0)}{K(0,0)K(z_0,\bar{z}_0)}\right)^{c/b},\end{aligned}\tag{4.92}$$

其中 $U=k\cdot I_0\in S$， $z=\xi_0(ka_h\cdot o)$. c 的值则由(4.91)式中取 $j=1$，同定理 4.3 中求 b 的值方法一样可求得.

为了完成定理的证明，还需证明当 $h\to+\infty$ 时，$J_{a_1,h}(z)$，$z=\xi_0(ka_h\cdot o)$，关于 $k\in K$ 一致收敛. 则由(4.78)式和分析的已知定理，就可得到(4.90)式成立，从而(4.92)式成立. 由(4.85)式，就需证明 $h\to+\infty$ 时，$A_h(\eta(h))$一致收敛，$(\partial\bar{s}/\partial\bar{t})$也一致收敛. 而由(4.73)式、(4.70)式和(4.84)式，易得 $A_h(\eta(h))$在 $h\to+\infty$ 时一致收敛于 $A(I_0)$. 因此，只须证明$(\partial\bar{s}/\partial\bar{t})$的一致收敛性即可.

设 θ 是 $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 对合，I 是 $\mathfrak{g}$ 上的恒等线性变换，则$\frac{1}{2}(I-\theta)$是 $\mathfrak{g}$ 到 $\mathfrak{p}$ 上的正交投影. 设 Π_0 的定义同前，$\bar{\mathfrak{n}}_E=\theta(\mathfrak{n}_E)$，$\Pi_1$ 是 $\mathfrak{g}$ 到 $\bar{\mathfrak{n}}_E$ 上的正交投影，再记

$$D(X)=\mathrm{diag}(e^{\alpha_1(X)},e^{\alpha_2(X)},\cdots,e^{\alpha_p(X)}),\ X\in\mathfrak{a}.$$

则 $\mathrm{Ad}k(k\in K)$与 $I-\theta$ 是交换的，正交投影 Π_1 则具有以下的性质：

$$\begin{cases}\Pi_1\mathrm{Ad}x=\mathrm{Ad}x\Pi_1=\Pi_1\mathrm{Ad}x\Pi_1,x\in G(E),\\ \Pi_1[\mathrm{Ad}a^{-1}]=D(H(a)),a\in A,\\ \det\Pi_1[\mathrm{Ad}n]=1,n\in\bar{N},\det\Pi_1[\mathrm{Ad}K]=1,\\ \qquad k\in K(E).\end{cases}\tag{4.93}$$

(4.93)式中第二个等式是在 $\bar{\mathfrak{n}}_E$ 的基$\{Y_{-\alpha_1},\cdots,Y_{-\alpha_p}\}$之下得到的线性变换的矩阵. 由(4.23)式易见有

$$\begin{aligned}Y_{\alpha_j}+Y_{-\alpha_j}&=(I-\theta)(Y_{-\alpha_j})\\&=(I-\theta)(Y_{\alpha_j}),\ \alpha_j\in\Sigma^+.\end{aligned}$$

$$2\Pi_0(Y_{-\alpha_j}) = 2\Pi_0(Y_{\alpha_j}) = Y_{\alpha_j} + Y_{-\alpha_j},\quad \alpha_j \in \Sigma_E^+.$$

由上面各式和(4.37)式上面的公式，可将(4.88)或(4.88′)的等式右端写成：

$$\begin{aligned}
&\Pi_0\left\{Ad k_2^{-1}\left(\sum_{j=1}^{p} ds_j\left[(e^{-\alpha_j(Y)} - e^{\alpha_j(Y)})\right.\right.\right.\\
&\qquad\left.\left.\left.\times (Y_{\alpha_j} + Y_{-\alpha_j}) + \overline{R}_j\right]\right)\right\}\\
&= -\Pi_0\left\{Ad k_2^{-1}\left(\sum_{j=1}^{p} ds_j e^{\alpha_j(Y)}(Y_{\alpha_j} + Y_{-\alpha_j})\right)\right\} + Q\\
&= -\Pi_0\left\{Ad k_2^{-1}\left(\sum_{j=1}^{p} ds_j e^{\alpha_j(Y)}(I-\theta)(Y_{-\alpha_j})\right)\right\} + Q\\
&= -\Pi_0(I-\theta)\left\{Ad k_2^{-1}\left(\sum_{j=1}^{p} ds_j Ad a_2^{-1}(Y_{-\alpha_j})\right)\right\} + Q\\
&= -2\Pi_0\left\{\sum_{j=1}^{p} ds_j Ad k_2^{-1} Ad a_2^{-1}(Y_{-\alpha_j})\right\} + Q\\
&= -2\Pi_0\{(Y_{-\alpha_1}, Y_{-\alpha_2}, \cdots, Y_{-\alpha_p})\\
&\qquad \times \Pi_1[Ad(a_2k_2)^{-1}](ds_1,\cdots,ds_p)^t\} + Q\\
&= -(Y_{\alpha_1} + Y_{-\alpha_1},\cdots, Y_{\alpha_p} + Y_{-\alpha_p})\\
&\qquad \times \Pi_1[Ad(a_2k_2)^{-1}](ds_1,\cdots,ds_p)^t\\
&\qquad + (Y_{\alpha_1} + Y_{-\alpha_1},\cdots, Y_{\alpha_p} + Y_{-\alpha_p})\\
&\qquad \times \tilde{Q}(ds_1,\cdots,ds_p)^t,
\end{aligned}\tag{4.94}$$

其中 $\tilde{Q}$ 是 $p\times p$ 方阵，上式最后一个等式右端的第二项是式中 Q 的表达式.

由(4.67)至(4.71)式的证明和记号，在(4.94)式中的 a_2k_2 可表示成

$$\begin{aligned}
a_2k_2 &= a_2(h)k_2(h) = k(h)^{-1}(k(h)a_2(h)k_2(h))\\
&= k(h)^{-1}(n_1'n_2'a_0a_h)\\
&= k(E,h)^{-1}(k_E(h)^{-1}n_1'n_2'a_0a_h)
\end{aligned}$$

$$\equiv k(E,h)^{-1}(k_E(h)^{-1}\tilde{n}_2 n_1' a_0 a_h)$$

$$\equiv k(E)(k_E\tilde{n}_2 n_1' a_0 a_h), \tag{4.94'}$$

其中 $\tilde{n}_2 = n_1' n_2' (n_1')^{-1} \in \overline{N}_E, n_1' \in \overline{N}(E)$.

由上式和(4.93)式就可得到

$$\begin{aligned}
&\Pi_1[\mathrm{Ad}(a_2k_2)^{-1}] \\
&= \Pi_1[\mathrm{Ad}(a_0a_h)^{-1}]\Pi_1[\mathrm{Ad}(n_1')^{-1}] \\
&\quad \times \Pi_1[\mathrm{Ad}(k_E\tilde{n}_2)^{-1}]\Pi_1[\mathrm{Ad}k(E)^{-1}] \\
&= D(H(a_0a_h))\Pi_1[Ad(n_1')^{-1}] \\
&\quad \times \Pi_1[\mathrm{Ad}(k_E\tilde{n}_2)^{-1}]\Pi_1[\mathrm{Ad}k(E)^{-1}] \\
&\equiv D(H(a_0a_h))B(h) \equiv D(Y)B(h).
\end{aligned} \tag{4.95}$$

由上式、(4.94)式和(4.88′)式，就得到

$$\left(\frac{\partial \bar{s}}{\partial \bar{t}}\right) = (B(h) - D(Y)^{-1}\overline{Q})^{-1}D(Y)^{-1}C(X),$$

其中 $\quad X = H(a_h) = hE,$

$$Y = H(a_0a_h) = hE + H(a_0) = hE + H(a_1k).$$

现在记

$$2\rho_E = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_p,$$

则由(4.93)式、(4.75)和(4.77)式可得

$$e^{-2\rho_E(H(a_1k))} = \lim_{h\to+\infty}\left(\frac{\partial \bar{s}}{\partial \bar{t}}\right). \tag{4.96}$$

由(4.94)式和(4.88′)式，当 $h\to+\infty$ 时 $(\partial \bar{s}/\partial \bar{t})$ 一致收敛的充要条件是(4.94′)式中的 $k(E,h)$ 和 $k_E(h)$ 是一致收敛的.

根据 Iwasawa 分解的实解析性，取定 $g\in G$，(4.67)至(4.70)式中的 $a_0, n, n_1, n_2, n_1', n_2'$ 及(4.94′)式中的 $\tilde{n}_2$，当 k 在 K 中变化时，均属于 G 的一个有界闭子集. 再由(4.73)和(4.74)式可得 $g(h)$ 和 $r(h)$ 对于 $k\in K$ 和 $h\in(0,+\infty)$ 在 G 中有界，则由(4.71)式可得

$$|b_j(h)e^{\alpha_j(Y)}| \leqslant \mathrm{d}(r(h),e),$$

$$\begin{aligned}
|b_j(h)| &\leqslant \mathrm{d}(r(h),e)e^{-\alpha_j(Y)} \\
&= \mathrm{d}(r(h),e)e^{-\alpha_j(H(gk))}e^{-\alpha_j(hE)}
\end{aligned}$$

$$\leqslant B_1 e^{-h}, j = 1,2,\cdots,p.$$

这里由(4.43)式和 $\alpha_j \in \Sigma_E^+ (j=1,2,\cdots,p)$，可得 $\alpha_j(E) \geqslant 1$. 这就表明：当 $h \to +\infty$ 时，$k_{2,E}(h)$ 一致收敛于 G 的幺元 e.

再由(4.68′)式和(4.69)式有

$$n'_1 n'_2 a_0 a_h = k_E(h) g(h) a_0 a_h.$$

所以有

$$n'_1 (a_h^{-1} n'_2 a_h) = a_h^{-1} k_E(h) a_h g(h).$$

由于 $n'_2 \in N_E$，所以当 $h > 0$ 时，有

$$\mathrm{d}(a_h^{-1} n'_2 a_h, e) \leqslant \mathrm{d}(n'_2, e).$$

这表明了 $\{a_h^{-1} k_E(h) a_h, h>0, k\in K\}$ 是 G 中有界集. 设

$$k_E(h) = \exp\left\{\sum_{j=1}^{p} c_j(h)(Y_{\alpha_j} - Y_{-\alpha_j})\right\},$$

则与对 $k_{2,E}(h)$ 估计相同，有 $|c_j(h)| \leqslant B_1 e^{-h}, j=1,2,\cdots,p$，即当 $h \to +\infty$ 时，$k_E(h)$ 关于 $k \in K$ 一致收敛于幺元 e. 于是由(4.69)式的第二个等式，就有

$$\mathrm{d}(g(h) r(h), n'_1 n'_2) \leqslant \mathrm{d}(k_E(h), e),$$

即 $g(h) r(h)$ 关于 $k \in K$ 一致收敛于 $n'_1 n'_2$.

由(4.71)式并记 $n'_2(h) \in N_E$ 为

$$n'_2(h) = \exp\left\{\sum_{j=1}^{p} b_j(h) e^{\alpha_j(Y)} Y_{\alpha_j}\right\},$$

则由引理 1.1 存在正数 B_2，使下式成立：

$$\mathrm{d}(r(h), n'_2(h)) \leqslant B_2 e^{-h}.$$

第1章§1.3的引理 1.1 有如下的推论：

引理 4.6　题设同引理 1.1，且 G 连通，则对任意的 X、$Y \in \mathfrak{g}$ 和 $t \in R$，引理 1.1 仍然成立.

证明　由引理 1.1 得到的 $A_k(X,Y)$ 的表达式可得到存在仅依赖于 X 和 Y 的正数 M，使得

$$|A_k(X,Y)| \leqslant M^k, k = 1,2,\cdots,$$

这表明引理 1.1 中 t 的幂级数在 R 上收敛. 又因为引理中的两端

都是 t 的实解析映照，这就证得引理 4.6 为真. ▌

由引理 4.6 和 $G=\tilde{K}_E G(E) N_E$ 分解的唯一性以及 $g(h)\in G(E)$，$n_2'(h)\in N_E$，则当

$$\mathrm{d}(g(h),e) \text{ 和 } \mathrm{d}(r(h),e) \leqslant B_3$$

时，存在正数 b_4，b_4 仅依赖于 B_3 和 G，使下式成立：

$$b_4 \leqslant \frac{\mathrm{d}(xn,e)}{\mathrm{d}(x,e)+d(n,e)} \leqslant 1,\ x\in G(E),\ n\in N_E.$$

由上式可得

$$\begin{aligned}
&\mathrm{d}(g(h)r(h),n_1'n_2') + B_2\mathrm{e}^{-h}\\
&\quad \geqslant \mathrm{d}(g(h)n_2'(h),n_1'n_2')\\
&\quad = \mathrm{d}((n_1')^{-1}g(h)n_2'(h)(n_2')^{-1},e)\\
&\quad \geqslant b_4\{\mathrm{d}((n_1')^{-1}g(h),e)\\
&\qquad + \mathrm{d}(n_2'(h)(n_2')^{-1},e)\}\\
&\quad = b_4\{\mathrm{d}(g(h),n_1')\\
&\qquad + \mathrm{d}(n_2'(h),n_2')\}\\
&\quad \geqslant b_4\{\mathrm{d}(g(h),n_1')\\
&\qquad + \mathrm{d}(r(h),n_2') - B_2\mathrm{e}^{-h}\}.
\end{aligned}$$

这就表明了，当 $h\to+\infty$ 时，关于 $k\in K$、$g(h)$ 和 $r(h)$ 分别一致收敛于 n_1' 和 n_2'.

对于 $G(E)$ 的 Cartan 分解，将 $G(E)\backslash\{e\}$ 分解成开集 $\mathring{G}(E)$ 和相对开集 $\mathring{G}_{ij}(E)$ 的有限个子集的并，$\mathring{G}(E)$ 的 Cartan 分解是唯一的，$\mathring{G}_{ij}(E)$ 的 Cartan 分解在模去迷向子群的意义下是唯一的. 先确定 $g(h)a_0\cap\mathring{G}(E)$、$g(h)a_0\cap\mathring{G}_{ij}(E)$ 的上述意义下的唯一的 Cartan 分解，再由维数从大到小可唯一确定使得(4.70)式连续的 $g(h)a_0$ 的 Cartan 分解，就可得到其中 $k(E,h)$ 在 $h\to+\infty$ 时关于 $k\in K$ 一致收敛，从而 $J_{a_1,h}(z)$ $(z=\xi_0(ka_h\cdot o))$ 关于 $k\in K$ 在 $h\to+\infty$ 时的一致收敛性由 Poisson—华核可以得到.

推论 4.7 假设同定理 4.5，又设

$$2\rho_E = \alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_p,\ \ \Sigma_E^+ = \{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_p\}.$$

则 D 的 Poisson－华核有下面两种表示：

$$P(z,U)=\mathrm{e}^{-2\rho_E(H(gk))}$$
$$=\left(\frac{K(z,\overline{U})K(U,\overline{z})}{K(0,0)K(z,\overline{z})}\right)^{c/b},$$

其中 $z\in D$，$U=k\cdot I_0\in S$，$g\in G$，$\psi_g(z)=0$，c、b 与定理 4.5 中的相同，$H(g)$ 由(4.66)式所定义.

引理 4.8　设 $D=G/K\subset C^n$，$P(z,U)$ 是 D 的 Poisson－华核，则存在 $D\times D$ 上的关于 z 全纯、关于 w 共轭全纯的函数 $Q(z,\overline{w})$ 适合 $Q(0,0)=1$，使下式成立：

$$P(z,U)=\frac{Q(z,\overline{U})Q(U,\overline{z})}{Q(z,\overline{z})},z\in D,\ U\in S.$$

证明　当 $D=G/K$ 不可约时，取

$$Q(z,\overline{U})=(K(z,\overline{U})/K(0,0))^{c/b}$$

即可. 当 D 可约时，由(4.47)和(4.60)式即可得到. ∎

下面继续证明定理 4.5：D 上的 Cauchy 核仍然由(4.16)和(4.17)式定义，并将(4.16)式中的 $a_i\varphi_i(z)$ 记为 $\phi_i(z)=a_i\varphi_i(z)$，$i=1,2,\cdots$. 则(4.17)式可写成

$$H(z,\overline{U})=\sum_{i=1}^{\infty}\phi_i(z)\overline{\phi_i(U)}.$$

参考文献[1]中证明了如下命题：

命题 4.9　设 $D\subset C^n$ 是以原点为中心的单连通的圆形域，且 D 的 Silov 边界 S 也是圆形的. 又设 $\{\psi_i(z),i=1,2,\cdots\}$ 是 D 上的全纯函数列，适合：

(1) $\{\psi_i(U),i=1,2,\cdots\}$ 是 $HL^2(S)$ 的完备标准正交函数系；

(2) $\psi_i(z)$ 在 D 及其边界上解析；

(3) $\sum_{i=1}^{\infty}\psi_i(z)\overline{\psi_i(U)}$ 对 $z\in D$，$U\in S$ 内闭一致收敛. 则有

$$H(z,\overline{U})=\sum_{i=1}^{\infty}\psi_i(z)\overline{\psi_i(U)}.$$

现在取 D 的全纯自同构 ϕ_g，适合 $\phi_g(z_0)=0$，置

$$\psi_i(z)=\phi_i(\phi_g(z))$$

$$\times \left\{ K(z,\bar{z}_0) \Big/ \sqrt{K(0,0)K(z_0,\bar{z}_0)} \right\}^{c/b},$$

则由 4.1.2 小节指出的 Bergman 核的性质和 Poisson一华核的性质，易见$\{\psi_i(z), i=1,2,\cdots\}$适合命题 4.9. 从而可得

$$H(z,\bar{U}) = \sum_{i=1}^{\infty} \psi_i(z) \overline{\psi_i(U)}$$

$$= H(\phi_g(z), \overline{\phi_g(U)}) \left(\frac{K(z,\bar{z}_0)K(z,\bar{U})}{K(0,0)K(z_0,\bar{z}_0)} \right)^{c/b}.$$

在上式中取 $z=z_0$，因为 $H(0,\bar{U})\equiv 1$，从而得到

$$H(z_0,\bar{U}) = (K(z_0,\bar{U})/K(0,0))^{c/b},$$

至此完成了定理 4.5 的证明. ▌

由定理 4.5 立即可得到参考文献[1]中得到的重要关系如下：

命题 4.10 设 $D=G/K\subset C^n$，$P(z,U)$和 $H(z,\bar{U})$分别是 D 的 Poisson一华核和 Cauchy 核，则有

$$P(z,U) = \frac{H(z,\bar{U})H(U,\bar{z})}{H(z,\bar{z})}.$$

从定理 4.1 到命题 4.10 的所有结论，不仅对 D 是 Harish-Chandra 的标准实现时能成立，而且对于 $D'=DA$，$D=G/K\subset C^n$，A 是 C^n 上非奇线性变换时，对 D' 也同样成立. 从而有如下推论：

推论 4.11 设 $D=G/K\subset C^n$，$D'=DA$，其中 A 是 C^n 上的非奇线性变换，则定理 4.1 至命题 4.10 对于 D'同样成立，特别当 D' 是四类典型域时，上述的定理和命题均成立.

§4.4 Poisson一华积分与 Cauchy 积分的边界性质

本节着重讨论 $R_{\mathrm{I}}(n,n)$上的 Poisson一华积分与 Cauchy 积分的边界性质. 其中采用的方法对讨论一般的有界对称域上的 Poisson一华积分与 Cauchy 积分有着重要的启示作用. 对于一般的有界对称域上的 Poisson一华积分与 Cauchy 积分的边界性质，这里就不详细介绍了.

有界对称域的 Poisson一华积分与 Cauchy 积分有着密切的

联系，它们之间的联系是通过一个投影算子来实现的. 下面先讨论这一问题.

4.4.1　两种积分的联系，T 算子

设 $D=G/K\subset C^n$，S 是 D 的 Silov 边界，$P(z,U)$和 $H(z,\overline{U})$是 D 的 Poisson－华积分，则 $f\in L^p(S)$ $(p\geqslant 1)$的 Poisson－华积分与 Cauchy 积分分别是

$$\int_S P(z,U)f(U)\mathrm{d}U,\quad \int_S H(z,\overline{U})f(U)\mathrm{d}U. \tag{4.97}$$

其中 $\mathrm{d}U$ 是 S 上的 Riemann 体积元素，S 上的 Riemann 度量是由 C^n 的欧氏度量所诱导出来的. 进一步，(4.97)式对 S 上的广义函数也同样有定义.

将(4.16)式的函数系简记为

$$\{\phi_n(U)=a_n\varphi_n(U),n=1,2,\cdots\}, \tag{4.98}$$

则$\{\phi_n(U),n=1,2,\cdots\}$是 $L^2(S)$的一个标准正交函数系，但它不是完备的. 将(4.98)式扩充为 $L^2(S)$的一组完备标准正交函数系，并将 $f\in L^2(S)$在这组基下展开的 Fourier 级数简记为

$$f(U)\sim\sum_{n=1}^{\infty}a_n(f)\phi_n(U)+\cdots, \tag{4.99}$$

则可定义 $L^p(S)$ $(p\geqslant 1)$的闭子空间 $HL^p(S)$为

$$HL^p(S)=\left\{f\in L^p(S)\ f(U)\sim\sum_{n=1}^{\infty}a_n(f)\phi_n(U)\right\}, \tag{4.100}$$

其中

$$a_n(f)=\int_S f(U)\,\overline{\phi_n(U)}\mathrm{d}U,$$

且总约定取 $\int_S\mathrm{d}U=1$.

设 $f\in L^p(S)$，$p\geqslant 1$，f 的 Fourier 级数由(4.99)式给出，定义 $T:L^p(S)\to HL^p(S)$如下：

$$Tf(U)\sim\sum_{n=1}^{\infty}a_n(f)\phi_n(U), \tag{4.101}$$

其中 $a_n(f)$ 为(4.99)和(4.100)式中所定义，则显然有如下引理：

引理 4.12 设 T 由(4.101)式定义，则 T 是 $L^2(S)$ 到 $HL^2(S)$ 上的正交投影算子，从而 T 是 $L^2(S)$ 上的有界线性算子，具有

$$\|Tf\|_2 \leqslant \|f\|_2.$$

关于 Poisson—华核和 Cauchy 核的联系，有下面的定理：

定理 4.13 设 $D=G/K\subset C^n$，S 是 D 的 Silov 边界，$f\in L^p(S)$，$p\geqslant 1$，f 的 Poisson—华积分与 Cauchy 积分由(4.97)式给出，T 是(4.101)式定义的算子，则当 $Tf\in L^q(S)q\geqslant 1$ 时，有

$$\int_S H(z,\overline{U})f(U)\mathrm{d}U = \int_S P(z,U)Tf(U)\mathrm{d}U.$$

特别是当 $p=2$ 时 $Tf\in L^2(S)$，上式对 $f\in L^2(S)$ 恒成立.

证明 由 Cauchy 核的定义(4.17)式及当 $z\in D$ 时 $H(z,\overline{w})$ 在 $w\in c(z)D$ $(c(z)>1)$ 上全纯，易见

$$\int_S H(z,\overline{U})f(U)\mathrm{d}U = \int_S H(z,\overline{U})Tf(U)\mathrm{d}U,$$

只要 $Tf\in L(S)$. 因此只需证明

$$\int_S H(z,\overline{U})f(U)\mathrm{d}U = \int_S P(z,U)f(U)\mathrm{d}U,$$

对一切 $p\geqslant 1$ 和 $f\in HL^p(S)$ 均成立.

设 $f\in HL^p(S)$，$p\geqslant 1$，记

$$F(z) = \int_S H(z,\overline{U})f(U)\mathrm{d}U,$$

则 $F(z)$ 在 D 上全纯，且有

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f)\phi_n(z),$$

而且以上级数在 D 中内闭一致收敛.

再取 $z_0\in D$，并令

$$G(z) = \int_S H(z,\overline{U})f(U)H(U,\overline{z}_0)/H(z_0,\overline{z}_0)\mathrm{d}U,$$

则有

$$\frac{f(U)H(U,\overline{z}_0)}{H(z_0,\overline{z}_0)} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\phi_n(U),$$

其中

$$b_n = \frac{1}{H(z_0, \overline{z_0})} \sum_{p,q} \overline{\phi_p(z_0)} a_q(f) b_n^{p,q},$$

$$\phi_p(U)\phi_q(U) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^{p,q} \phi_n(U),$$

且对固定的 p 和 q，$b_n^{p,q} \neq 0$ 的项只有有限项，这是由 $\phi_p(z)$ 取为 z 的齐次多项式的性质所决定的.

应用 4.2.2 小节中的记号，将 $H^2(D)$ 的完备标准正交函数系记为

$$\{\varphi^i_{j,l}(z), 1 \leqslant l \leqslant m_{ij}, 1 \leqslant i \leqslant n_j, j = 0,1,2,\cdots\}.$$

相应地，由(4.16)式给出的 $HL^2(S)$ 的完备标准正交函数系则记为

$$\{\phi^i_{j,l}(U) = a^i_{j,l}\varphi^i_{j,l}(U), 1 \leqslant l \leqslant m_{ij},$$
$$1 \leqslant i \leqslant n_j,\ j = 0,1,2,\cdots\},$$

其中 $\varphi^i_{j,l}(z)$ 及 $\phi^i_{j,l}(z)$ 均是 $z \in C^n$ 的 j 次齐次多项式，且有

$$b_j = \sum_{i=1}^{n_j} m_{ij} = C^{n-1}_{n+j-1}$$
$$= (n+j-1)!/[(n-1)!j!].$$

由(4.2)式及表示理论，易见

$$|\phi^i_{j,l}(U)| \leqslant \sqrt{m_{ij}}.$$

而由参考文献[1]中的定理 4.6.1 又有

$$\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{n_j} \sum_{l=1}^{m_{ij}} |\phi^i_{j,l}(U)|^2 r^j = (1-r)^{-n},$$
$$0 \leqslant r < 1.$$

这就表明：若 $f \in HL^p(S) \subset L(S)$，则有

$$|a^i_{j,l}(f)| = \left| \int_S f(U)\, \overline{\phi^i_{j,l}(U)} \mathrm{d}U \right|$$
$$\leqslant \sqrt{m_{ij}} \, \| f \|_1.$$

由上面的讨论，容易验证以上定义的 $G(z)$ 是

$$G(z) = F(z)H(z,\bar{z}_0)/H(\bar{z}_0,\bar{z}_0).$$

特别是可得

$$\int_S P(z_0,U)f(U)\mathrm{d}U = G(z_0)$$

$$= F(z_0) = \int_S H(z_0,\bar{U})f(U)\mathrm{d}U$$

对一切 $z_0 \in D, f \in HL^p(S)$，$p \geqslant 1$ 成立. 至此证明了本定理. ▌

由定理 4.13 可见 Cauchy 积分的边界性质乃由 Poisson—华积分的边界性质与算子 T 的有界性所决定，而算子 T 又是 S 上的一个奇异积分算子. 这样，关于 Cauchy 积分的边界性质的讨论就转化为对多复变的奇异积分和 Poisson—华积分的边界性质的讨论了.

4.4.2 $R_{\mathrm{I}}(n,n)$上的 Poisson—华积分

由 $R_{\mathrm{I}}(n,n)$的 Silov 边界为 $S=U_n$ 即 n 阶酉群，根据参考文献[1]或参考文献[2]中所述，或本章中的定理 4.4 和定理 4.5 可得知 $R_{\mathrm{I}}(n,n)$的 Poisson—华核是

$$P(Z,U) = \det(I - Z\bar{Z}')^n|\det(I - Z\bar{U}')|^{-2n},$$

其中 $Z \in R_{\mathrm{I}}(n,n)$，$U \in U_n$.

当取 $Z = rV \in R_{\mathrm{I}}(n,n)$，$V \in U_n$ 时，

$$P(rV,U) = \det(I - r^2I)^n|\det(I - rVU^{-1})|^{2n}$$

$$= (1 - r^2)^{n^2}|\det(I - VU^{-1})|^{-2n}$$

$$\equiv P(r,VU^{-1}).$$

这时，$P(r,U^{-1}V)$对固定的 r 由 U_n 上的函数 $P(r,U)$所决定. 子是 f 的 Poisson—华积分就可写成

$$(P_rf)(V) = \int_{U_n} P(rV,U)f(U)\mathrm{d}U$$

$$= P(r,\cdot) * f(V)$$

$$= f * P(r,\cdot)(V).$$

上面的卷积交换性由 $P(r,U)$为 U_n 上的中心函数推得. 记

$$\Lambda = \mathrm{diag}(e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}, \cdots, e^{i\theta_n}),$$

则任一 $U \in U_n$ 必与某个 Λ 共轭，这就得到

$$P(r,U) = (P_r(\theta_1)P_r(\theta_2)\cdots P_r(\theta_n))^n,$$

这里 $P_r(t)$ 是一维的 Poisson 核.

同第2章中一样，记

$$f_V(U) = \int_{U_n} f(VtUt^{-1})\mathrm{d}t,$$

则 $f_V(U)$ 是 $U \in U_n$ 上的中心函数. 又因为

$$P(r,U) = P(r,U^{-1}),$$

就有

$$\begin{aligned} P_r(f)(V) &= f * P(r,\cdot)(V) \\ &= \int_{U_n} f_V(U^{-1})P(r,U)\mathrm{d}U \\ &= \int_{U_n} f_V(U)P(r,U)\mathrm{d}U. \end{aligned}$$

按照第1章内的中心函数的积分公式，并简记

$$f_V(\Lambda) = f_V(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_n) = f_V(\theta),$$

$$P(r,\Lambda) \equiv P(r,\theta),$$

就有

$$P_r(f)(V) = \frac{1}{|W||Q|}\int_Q f_V(\theta)P(r,\theta)|D(\theta)|^2\mathrm{d}\theta,$$

其中 $D(\theta)$ 及以后要用的 $P(\theta)$、$D_0(\theta)$ 等，均如(2.18)式所定义，$|W| = n!$ 是 U_n 的 Weyl 群的阶，$Q = [-\pi, \pi]^n$.

令

$$t = \frac{1}{1-r},$$

$$g(\theta) = \prod_{i=1}^{n}(1+\theta_i^2)^{-1},$$

$$g_t(\theta) = t^n g(t\theta). \tag{4.102}$$

则容易验证，存在正数 A_0，使得

$$P(r,\theta) \leqslant A_0(g_t(\theta))^n.$$

又因为

$$D(\theta) = D_0(\theta)P(\theta),$$

且 $|D_0(\theta)|$ 在 Q 上有界($\leqslant 1$)，从而可得

$$\begin{aligned}
&|P_r(f)(V)| \\
&\leqslant \frac{A_0}{|W||Q|}\int_Q |f_V(\theta)|(g_t(\theta))^n|P(\theta)|^2 \mathrm{d}\theta \\
&= \frac{A_0}{|W||Q|}\int_{tQ} |f_V(\theta/t)|g(\theta)^n|P(\theta)|^2 \mathrm{d}\theta.
\end{aligned}$$

容易验证，存在正数 B_0 使得

$$g(\theta)^{n-1}|P(\theta)|^2 \leqslant B_0.$$

由此可得

$$\begin{aligned}
&|P_r(f)(V)| \\
&\leqslant A_0 B_0 |W|^{-1}|Q|^{-1}\int_{tQ} |f_V(\theta/t)|g(\theta)\mathrm{d}\theta \\
&\equiv c_0\int_{tQ} |f_V(\theta/t)|g(\theta)\mathrm{d}\theta. \qquad (4.103)
\end{aligned}$$

记 $\mathbf{Z}_+^n$ 为 n 元非负整格点的集. 对于

$$J = (j_1, j_2, \cdots, j_n) \in \mathbf{Z}_+^n,$$

当所有的 $j_k \neq 0$ $(k=1,2,\cdots,n)$时，置

$$\begin{aligned}
E_J = &[2^{j_1-1}, 2^{j_1}] \times [2^{j_2-1}, 2^{j_2}] \times \cdots \\
&\times [2^{j_n-1}, 2^{j_n}].
\end{aligned}$$

若有某个 $j_k = 0$ 时，就将上式中的$[2^{j_k-1}, 2^{j_k}]$换为

$$[0, 2^{j_k}] = [0, 1].$$

再记 σ_j 为 R^n 关于坐标平面 $\theta_j = 0$ 的反射，它生成了 R^n 的一个由正交变换组成的有限变换群 Σ，Σ 的阶为 2^n，令

$$W_J = \bigcup_{\sigma \in \Sigma} \sigma(E_J), \quad J \in \mathbf{Z}_+^n.$$

则 W_J 与 $J \in \mathbf{Z}_+^n$ 彼此互不重叠，且有

$$R^n = \bigcup_{J \in \mathbf{Z}_+^n} W_J, \qquad (4.104)$$

再令

$$V_J = [-2^{j_1}, 2^{j_1}] \times [-2^{j_2}, 2^{j_2}] \times \cdots$$

$$\times [-2^{j_n}, 2^{j_n}], \tag{4.105}$$

则显然有 V_J 和 W_J 的体积 $|V_J|$ 和 $|W_J|$ 适合

$$|V_J| \leqslant 2^n |W_J|.$$

用以上的记号就可得

$$\begin{aligned}
&|P_r(f)(V)| \\
&\leqslant C_1 \sum_J 2^{-2|J|} \int_{W_J} |f_V(\theta/t)| \mathrm{d}\theta \\
&\leqslant C_1 \sum_J 2^{-2|J|} \int_{V_J} |f_V(\theta/t)| \mathrm{d}\theta \\
&= C_1 \sum_J 2^{-2|J|} t^n \int_{t^{-1}V_J} |f_V(\theta)| \mathrm{d}\theta \\
&\leqslant 2^n C_1 \sum_J 2^{-|J|} \frac{1}{|t^{-1}V_J|} \int_{t^{-1}V_J} |f_V(\theta)| \mathrm{d}\theta \\
&\leqslant C_2 \sum_J 2^{-|J|} f_J^*(V),
\end{aligned} \tag{4.106}$$

其中 $|J| = j_1 + j_2 + \cdots + j_n$,

$$f_J^*(V) = \sup_{r>0} \left\{ \frac{1}{|rV_J|} \int_{rV_J} |f_V(\theta)| \mathrm{d}\theta, rV_J \subset Q \right\}. \tag{4.107}$$

以上估计中出现的极大函数本质上是由 G 的一个非测地凸集合族定义的. 即使在欧氏空间中,用凹集族定义的极大函数的性质也是未知的. 所幸的是, f_J^* 可以用一族低维的极大函数来控制. 以下就对此进行讨论.

4.4.3　极大函数 f_J^* 的有界性

上一小节中的(4.106)式给出了 Poisson—华积分的一个极大函数族的控制估计. 以下在一般的紧致李群 G 上定义并讨论极大函数族 $\{f_J^*, J \in \mathbf{Z}_+^n\}$ 的有界性问题.

设 G 是一个秩为 n 的连通紧致李群, T 是 G 的一个 Cartan 子群, $\mathfrak{g}$ 是 G 的李代数, $\mathfrak{h}$ 是 T 对应的 $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 子代数, $\exp: \mathfrak{g} \to G$ 是指数映射,于是,限制在 $\mathfrak{h}$ 上, $\exp: \mathfrak{h} \to T$ 可看作 $\mathfrak{h}$ 到 T 上的指数映射,取 Q 为指数映射 $\exp: \mathfrak{h} \to T$ 的切割迹的内部的闭包,则 Q 是 n 维欧氏空间 $\mathfrak{h}$ 中的平行 $2n$ 面体. 在 $\mathfrak{h}$ 中取定一组标准正交基

$\{H_1,H_2,\cdots,H_n\}$，将 $h\in\mathfrak{h}$ 用坐标表示成

$$h=\theta_1H_1+\theta_2H_2+\cdots+\theta_nH_n,$$

V_J 是由(4.105)式定义的 $\mathfrak{h}$ 中的长方体，$J\in\mathbf{Z}_+^n$.

设 $L(G)$、$L_I(G)$ 与§1.5 中的相同，对于 $f\in L(G)$，令

$$f_x(y)=\int_G f(xuyu^{-1})\mathrm{d}u, \tag{4.108}$$

则 $f_x(\cdot)\in L_I(G)$，对 $J\in\mathbf{Z}_+^n$，令

$$f_J^*(x)=\sup_{r>0}\left\{\frac{1}{|rV_J|}\int_{rV_J}|f_x(\exp h)|\mathrm{d}h,\ rV_J\subset Q\right\}, \tag{4.109}$$

则(4.107)式定义的极大函数就是上式定义的极大函数的特例．对于 $f_J^*(x)$ 的有界性，有以下的定理：

定理 4.14 设 $f\in L^p(G)$，$p>1$，$J\in\mathbf{Z}_+^n$，$f_J^*(x)$ 由(4.109)式定义，则存在不依赖于 $J\in\mathbf{Z}_+^n$，仅依赖于 G 和 $p>1$ 的正数 A_p，使下式成立：

$$\|f_J^*\|_p\leqslant A_p\|f\|_p,$$

而当 $|f|\log(2+|f|)\in L(G)$ 时，则存在着仅依赖于 G 的正数 A_1，使得

$$\|f_J^*\|_1\leqslant A_1\|f\log(2+|f|)\|_1$$

成立.

证明 定义极大函数

$$f_J^*(u,x)=\sup_{r>0}\left\{\frac{1}{|rV_J|}\int_{rV_J}|f(xu\exp hu^{-1})|\mathrm{d}h,\ rV_J\subset Q\right\},$$

对固定的 $u\in G$，$T_u=uTu^{-1}$ 也是 G 的一个 Cartan 子群，它对应的 Cartan 子代数 $Adu(\mathfrak{h})$ 与 $\mathfrak{h}$ 同构，且

$$G=G/T_u\times T_u$$

是微分同胚的，对于每个 $x\in G$，存在唯一的 $w\in G/T_u$ 和 $t\in T_u$，使得 $x=wt$. 因此对固定的 $u\in G$ 和 $w\in G/T_u$，记

$$\mathcal{J}_{J,u,w}(t)=f_J^*(u,wt),$$

$$f_{u,w}(t)=f(wt),\ t\in T_u.$$

则 $f_{u,w}(t)$ 是 n 维环群 T_u 上的函数，$\mathcal{T}_{J,u,w}^{*}$ 就是 $f_{u,w}$ 的 Hardy-Littlewood 意义下的极大函数.

由于

$$\int_{G/T_u}\left(\int_{T_u}|f_{u,w}(t)|^p\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}w$$
$$=\int_{G/T_u}\int_{T_u}|f(wt)|^p\mathrm{d}t\mathrm{d}w$$
$$=\int_G|f(x)|^p\mathrm{d}x=\|f\|_p^p,$$

从而当 $f\in L_G^p$ 时，对任意固定的 $u\in G$ 和几乎所有的 $w\in G/T_u$，$f_{u,w}\in L^p(T_u)$，考虑 T_u 的子集：

$$E_W(\alpha)=\{t\in T_u,f_{J,u,w}^{*}(t)>\alpha\},$$

则对每个 $t\in E_W(\alpha)$，存在一个 $r(t)>0$ 且 $r(t)V_J\in Q$，再记

$$T_{r(t),J}=\exp\{r(t)uV_Ju^{-1}\}\subset T_u,$$

使得

$$\frac{1}{|T_{r(t),J}|}\int_{T_{r(t),J}}|f_{u,w}(tb)|\mathrm{d}b>\alpha,$$

其中 $|T_{r(t),J}|$ 是 T 的子集 $T_{r(t),J}$ 的 Haar 测度，

$$|T_{r(t),J}|=b_0|r(t)V_J|,$$

其中 b_0 是仅依赖于 G 而与 $J\in\mathbf{Z}_+^n$ 无关的正数.

将 $T_{r,J}=\exp\{ruV_Ju^{-1}\}$ 看作 T_u 中的"长方体"，则任意两个这样的长方体必有包含关系，且每个 $t\in E_W(\alpha)$ 附属一个平移"长方体" $tT_{r(t),J}$. 这就类似于欧氏空间的证明，可得 $E_W(\alpha)$ 的 Haar 测度 $\mathrm{mes}E_W(\alpha)$，适合

$$\mathrm{mes}E_W(\alpha)\leqslant\frac{6^nb_0}{\alpha}\|f_{u,w}(\cdot)\|_1,$$

$$b_0=\frac{|V_J|}{|\exp V_J|},$$

再置

$$E(\alpha)=\{x\in G,f_J^{*}(u,x)>\alpha\},$$

则当 $x\in E(\alpha)$, $x=wt$ 时,就有 $t\in E_w(\alpha)$, 这就可得

$$\begin{aligned}\mathrm{mes}E(\alpha) &= \int_{G/T_n}\mathrm{mes}E_w(\alpha)\mathrm{d}w\\ &\leqslant \frac{6^n b_0}{\alpha}\int_{G/T_n}\int_{T_n}|f(wt)|\mathrm{d}t\mathrm{d}w\\ &= \frac{6^n b_0}{\alpha}\|f\|_1.\end{aligned}$$

这就证明了 f_J^* 是弱(1,1)型的,类似可证明 f_J^* 是(∞,∞)型的,且 $\|f_J^*\|_\infty=\|f\|_\infty$. 由 Marcinkiewicz 插值定理,存在不依赖于 $J\in\mathbf{Z}_+^n$,仅依赖于 G 和 p 的正数 A_p, $p>1$,使下式成立:

$$\|f_J^*(u,\cdot)\|_p\leqslant A_p\|f\|_p.$$

由 f_J^* 的定义和 $f_x(y)$ 的定义易见

$$f_J^*(x)\leqslant\int_G f_J^*(u,x)\mathrm{d}x\leqslant A_p\|f\|_p,\quad p>1.$$

又因为

$$\begin{aligned}&\int_G f_J^*(u,x)\mathrm{d}x\\ &\leqslant\int_{f_J^*(u,x)\leqslant 1}f_J^*(u,x)\mathrm{d}x+\int_{f_J^*(u,x)>1}f_J^*(u,x)\mathrm{d}x\\ &\leqslant 1+6^n b_0\|f\|_1+\int_1^\infty\frac{6^n b_0}{\alpha}\left(\int_{|f|>\alpha/2}|f(x)|\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}\alpha\\ &\leqslant 1+A_1\|f\log(2+|f|)\|_1.\end{aligned}$$

这就完成了定理的证明. ▌

4.4.4 Poisson—华积分与 Cauchy 积分的收敛性

有了上面的准备,就可证明以下定理:

定理 4.15 设 $f\in L^p(U_n)$, $p>1$,则 f 的 Poisson—华积分 $P_r(f)(V)$ 当 $r\to 1$ 时几乎处处收敛于 $f(V)$.

证明 根据调和分析中熟知的几乎处处收敛的定理,只须证明当 $f\in C(U_n)$时,对一切 $V\in U_n$,有

$$\lim_{r\to 1}P_r(f)(V)=f(V),\tag{4.110}$$

以及证明

$$M(f)(V)=\sup_{0<r<1}|P_r(f)(V)| \tag{4.111}$$

适合

$$\text{mes}\{V, M(f)(V)>\alpha\}\leqslant\{A\|f\|_p\alpha^{-1}\}^q, q\geqslant 1.$$

但由(4.106)式和定理4.14可得

$$M(f)(V)\leqslant\sum_{J\in Z_+^n}2^{-|J|}f_J^*(V).$$

从而有

$$\|M(f)\|_p\leqslant\sum_{J\in Z_+^n}2^{-|J|}A_p\|f\|_p$$

$$=B_p\|f\|_p,\ p>1.$$

这说明(4.111)式成立.

由 Poisson—华核的定义,对取定的 $Z\in R_{\text{I}}(n,n)$,D 的全纯自同构 ϕ_g 适合 $\phi_g(Z)=0$,而在 $S=U_n$ 上,则有 $\phi_g(U)=V$,因而在微分同胚 $\phi_g:U_n\to U_n$ 之下有

$$dV=P(z,U)dU,$$

其中 dV 和 dU 分别是 U_n 在 V 和 U 点的 Haar 测度,从而可得

$$\int_{U_n}P(Z,U)dU=1.$$

现在(4.103)就可用于以下估计:

$$|P_r(f)(V)-f(V)|$$

$$\leqslant C_0\int_{tQ}|f_V(\theta/t)-f(V)|g(\theta)d\theta$$

$$\leqslant C_0\int_{\mathfrak{h}}|f_V(\theta/t)-f(V)|g(\theta)d\theta$$

$$=C_0\left(\int_{|\theta|>M}+\int_{|\theta|\leqslant M}\right)$$

$$\equiv I_{t,M}+J_{t,M}.$$

因为 f 连续,从而有

$$|f_V(\theta/t)-f(V)|\leqslant 2\|f\|_\infty,$$

这就可得

$$0 \leqslant I_{t,M} \leqslant C_0 2 \| f \|_\infty \int_{|\theta|>M} g(\theta) \mathrm{d}\theta.$$

上式在 $M \to +\infty$ 关于 t 一致收敛于零.

而对任意取定的 $M>0$，由 f 的连续性知 $f_V(y)$ 连续，又易见 $f_V(0)=f(V)$，从而有

$$\lim_{t \to +\infty} J_{t,M} = 0.$$

以上两个极限导出了(4.110)式对一切 $V \in U_n$ 成立. 于是完成定理的证明. ▌

$R_{\mathrm{I}}(n,n)$上的 Cauchy 核为

$$H(Z,\overline{U}) = \det(I - Z\overline{U}')^{-n},$$

记

$$H_r(VU^{-1}) = H(rV,\overline{U}) = \det(I - rV\overline{U}')^{-n},$$

则 f 的 Cauchy 积分在 $z=rV$ 时可记为

$$H_r(f)(V) = \int_{U_n} f(U) H(rV,\overline{U}) \mathrm{d}U$$

$$= \int_{U_n} f(U) \det(I - rV\overline{U}')^{-n} \mathrm{d}U.$$

定理 4.16　设 $f \in L^p(U_n)$ 且 $Tf \in L^q(U_n)$，其中 T 由(4.101)式定义，$p,q>1$. 则 f 的 Cauchy 积分

$$\int_{U_n} f(U) \det(I - Z\overline{U}')^{-n} \mathrm{d}U$$

当 Z 沿着 rV $(0<r<1)$趋于 V 时，几乎处处收敛于 $Tf(V)$. 特别是若 $f \in L^2(U_n)$，则 $H_r(f)(V)$在 $r \to 1$ 时几乎处处收敛于 $Tf(V)$.

定理 4.16 是定理 4.15 和定理 4.13 的推论.

从上面的讨论可知，对于有界对称域的 Poisson—华积分与 Cauchy 积分，尚有两个重要的开问题，其一是：当 $f \in L(S)$时，Poisson—华积分是否几乎处处收敛？其二是：(4.101)式定义的算子 T 对于 $L^p(S)$ $(1<p<2)$是否有界的问题. 这两个开问题的解决，就可使有界对称域的 Poisson—华积分与 Cauchy 积分的性质得到完整的解决. 而第二个问题又有着更深刻的背景，即算子 T

可定义为一个多复变的奇异积分,它比目前欧氏空间讨论过的任何一类奇异积分似乎更复杂得多.

参 考 文 献

[1] 华罗庚.多复变数函数论中的典型域的调和分析.北京:科学出版社,1958

[2] 龚 昇.典型群上的调和分析,北京:科学出版社,1983

[3] 龚 昇.多复变数的奇异积分.上海:上海科学技术出版社,1982

[4] 陆善镇.H^p空间实变理论及其应用.上海:上海科学技术出版社,1992

[5] 万哲先.李代数.北京:科学出版社,1964

[6] 严志达,许以超.Lie 群及其 Lie 代数.北京:高等教育出版社,1985

[7] Bröcker T & tom Dieck T. Representations of Compact Lie Groups. New York/Berlin:Springer-Verlag, 1985

[8] Gong S. Harmonic Analysis on Classical Groups. New York/Berlin:Springer-Verlag, 1991

[9] Gong S. Integrals of Cauchy Type on the Ball. Hong Kong:International Press, 1993

[10] Gong S. Convex and Stalike Mappings in Several Complex Variables. Beijing/New York: Science Press, Dordrocht/London: Kluwer Academic Publishers, 1998

[11] Helgason S. Groups and Geometric Analysis. Orlando/New York / London: Academic Press, INC. ,1984

[12] Helgason S. Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces. New York/London:Academic Press, 1978

[13] Knapp A W. Representation Theory of Semisimple Groups. Princeton:Princeton University Press, 1986

[14] Blank B. Nontangential maximal functions over compact Riemannian manifolds, Proc. Amer. Math. Soc. 1988,103:999～1002

[15] Cecchini C. Lacunary Fourier series on compact Lie groups. J. Funct. Anal. 1972,11:191～203

[16] Clerc J L. Bochner-Riesz means of H^p functions $(0<p<1)$ on compact Lie groups. Lecture Notes in Math. 1987,1243:86～107

[17] Cowling M, Mantero A and Ricci F. Pointwise estimate for some kernels on compact Lie groups. Rend. Circ. Mat. Palermo Series Ⅱ, 1982,XXXⅠ;145～158

[18] Dreseler B. Norms of zonal spherical functions and Fourier series on compact symmetric spaces. J. Funct Anal. 1981,44:74～86

[19] Dreseler B. Estimates from below for Lebesgue constants of Fourier serier on compact Lie groups. Manuscripta Math., 1980, 31: 17～23

[20] Figa-Talamanca A and Rider D. A theorem of Littelwood and lacunary series for compact groups. Pacific J. Math, 1967, 21: 487～492

[21] 范大山. H^p theory on compact Lie groups. MIA, Vol. 327, pp. 80～102, Dordrecht/Boston/London: Kluwer Academic Publishers, 1995

[22] Frota-Mattos L A. Analytic continuation of the Fourier series on Conected compact Lie groups. J. Funct. Anol. 1978, 29: 1～15

[23] 龚 昇. 酉群上的富里埃分析 I. 数学学报, 1960, 10: 239～261

[24] 龚 昇. 酉群上的富里埃分析 II. 数学学报, 1962, 12: 17～31

[25] 龚 昇. 酉群上的富里埃分析 III. 数学学报, 1963, 13: 152～161

[26] 龚 昇. 酉群上的富里埃分析 IV. 数学学报, 1963, 13: 323～331

[27] 龚 昇. 酉群上的富里埃分析 V. 数学学报, 1965, 15: 305～325

[28] 龚 昇. 旋转群上富里埃级数的部分和. 中国科学技术大学学报, 9(1979), 25～30

[29] Giulini S, Soardi P M and Travagini G. Norms of characters and Fourier series on compact Lie groups. J. Funct Anal. 1982, 46: 88～101

[30] 贺祖琪, 陈广晓, 酉辛群上的调和分析 I. 数学研究与评论, 1981, 1: 29～41

[31] Heckman J. Projections of orbits and asymptotic behaviour of multiplicities for compact Lie groups Thesis Leiden 1980

[32] Hewitl E and Zuckerman H. Some theorems on lacunary series with extensions to compact groups. Trans. Amer. Math Soc. 1959, 93: 1～19

[33] Johnson K and Korányi A. The Hua operators on bounded Symmetric domains of tube type, Ann of Math, 1980, 111: 589～608

[34] Korányi A. Boundary behavior of Poisson integrals on symmetric spaces. Trans Amer Math Soc, 1969, 140: 393～409

[35] Korányi A. On the injectivity of the Poisson transform. J. Funct. Anal, 1982, 45: 293～296

[36] Koranyi A and Malliavin P. Poisson formula and compound diffusion associated to an overdetermined elliptic system on the Siegel halfplane of rank two. Acta Math. 1975, 134: 185～209

[37] Korányi A and Vagi S. Singular integrals in homogeneous spaces and some problemes of classical analysis. Ann. Scuola Normale Superiore Pisa, 1971, 25: 575～648

[38] 陆善镇, 郑学安. 紧致齐性空间上的调和分析(I). 北京师范大学学报, 1992, 28

(3):265～275

[39] 陆善镇,郑学安.紧致齐性空间上的调和分析(Ⅱ).北京师范大学学报,1992,28(3):276～286

[40] Mayer R A. Fourier series of differentiable functions on SU(2). Duke. Math. J.,1967,34:549～554

[41] Meany C. A Cantor-Lebesgue theorem for spherical convergence on a compact Lie group. Proc. Ann. Sem. Canad Math. Congr Queens Univ. Kingston Ontario ,1977

[42] Ragozin D L. Central measures on compact Lie groups. J. Funct Anal,1972,10 ;212～229

[43] Ragozin D L. Approximation theory,absolute convergence, and smoothness of random Fourier series on compact Lie groups. Math. Ann. 1976,219;1～11

[44] Sherman T. Fourier analysis on the sphere. Trans. Amer Math Soc. 1975,209:1～31

[45] Sherman T. Fourier analysis on compact symmetric space. Bull. Amer. Math. Soc. 1977,83:378～380

[46] Stanton R J. On mean convergence of Fourier series on compact Lie groups Trans. Amer. Math. Soc. 1976,218:61～87

[47] Stanton R J. and Thomas P A. Polyhodral summability of Fourier series on compact Lie groups. Amer. J. Math. 1978,100;477～493

[48] Strichartz R S. Multiplier transformations on Compact Lie groups and algebras. Trans. Amer. Math. Soc. 1974,193;99～110

[49] Sugiura M. Fourier series of smooth functions on compact Lie groups. Osaka Math. J. 1971,8;33～47

[50] Taylor M. Fourier series on compact Lie groups. Proc. .Amer. Math. Soc. 1968,19;1103～1105

[51] 王世坤,董道珍.旋转群上的调和分析I,数学年刊,1983,2

[52] 郑学安.紧李群上的富里埃分析、数学进展,1984,13:103～118

[53] 郑学安.紧李群上函数的 Riesz 变换和 Bessel 变换.科学通报,1986,31:1444～1448

[54] 郑学安.紧李群上方体求和的几乎处处收敛与多复变域 R_1 的 Cauchy 积分与 Dirichlet 问题.数学学报,1988,31:443～448

[55] Zheng Xuean. Summations by Spherical Means of Fourier Series on Compact Lie Groups (Ⅰ),Northeastern Math J. 1991,7;295～301

[56] 郑学安.紧李群上 Fourier 系数的渐近性质.数学学报,1992,35;20～32

[57] 郑学安. 紧致齐性空间上的调和分析(Ⅳ),数学学报,1995,38:418～429

[58] Zheng Xue-an. Harmonic analysis on Compact Lie groups and Compact homogeneous spaces in China. MIA Vol 327、266-286. Dordrecht/Boston/London: Kluwer Academic Publishers,1995

[59] 郑学安,陆善镇、紧致齐性空间上的调和分析(Ⅰ),数学进展,1993,22:289～305

[60] 郑学安,许增福,赵和生. 紧李群上的多项式逼近(Ⅰ),数学进展,1987,16:61～66

[61] 郑学安,赵和生,许增福,紧李群上的多项式逼近(Ⅱ),数学进展,1990,19:199～204